

English Summary:

2.6 Harmonic oscillator (algebraic solution)

$$\left. \begin{aligned} \text{Ladder operator: } b &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \\ H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \end{aligned} \right\} [b, b^\dagger] = 1$$
$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x$$

$$H = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)$$

$$b|0\rangle = 0 \quad \text{ground state } n=0$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle \quad n\text{-th excited state}$$

$N := b^\dagger b$ number operator of oscillation quanta

$N|n\rangle = n|n\rangle$ b^\dagger creation operator
 b annihilation operator

Zusammenhang mit der Ortsdarstellung

$$\text{Mit } \varphi_n(x) = \langle x | n \rangle, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x$$

$$b \varphi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hbar \frac{d}{dx} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \right) \varphi_n(x)$$

$$\xi := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

$$\Rightarrow b \varphi_n(\xi) = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \varphi_n(\xi)$$

Wegen $b|0\rangle = 0$ folgt für $n=0$:

$$0 = \left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right) \varphi_0(\xi) \Rightarrow \frac{d\varphi_0}{\varphi_0} = -\xi d\xi$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_0(\xi) = A_0 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)}$$

Grundzustand
 ($A_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}$ Normierung)

angeregte Zustände:

$$\varphi_1(\xi) = b^+ \varphi_0(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \varphi_0(\xi) = \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d}{d\xi} \left[e^{-\frac{\xi^2}{2}} \varphi_0(\xi) \right]$$

$$\varphi_n(\xi) = \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}} \varphi_0(\xi) = \frac{i^n}{\sqrt{2^n n!}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n \varphi_0(\xi) = i^n \underbrace{\frac{A_0}{\sqrt{2^n n!}}}_{A_n} (-1)^n e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Hermite'sche Polynome

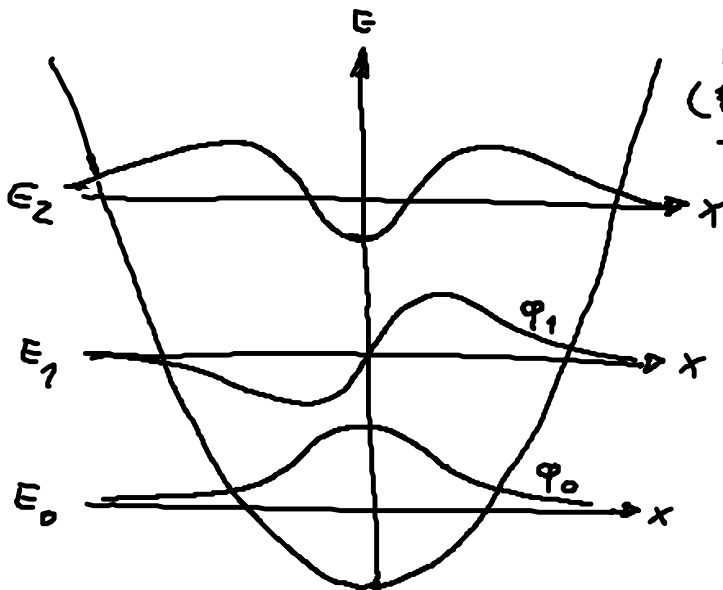
$$H_0(\xi) = 1$$

$$H_1(\xi) = 2\xi$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

Parität von φ_n : $(-1)^n$



neglieren
(Phasen-
faktor)

3. Drehimpuls

3.1 Drehimpuls - Eigenzustände

Drehimpulsoperator $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$

in Komponenten $L_j = x_k p_l - x_l p_k$ mit (jkl) zykl.
 d.B. (123)
 oder (231)
 oder (312)

\underline{L} ist hermite'sch: $L_j^+ = (x_k p_l)^+ - (x_l p_k)^+$
 $= p_l^+ x_k^+ - p_k^+ x_l^+$
 $= p_l x_k - p_k x_l$

$$= x_k p_l - x_l p_k = L_j$$

Vertauschungs-Relationen:

$$[L_1, L_2] = [(x_2 p_3 - x_3 p_2), (x_3 p_1 - x_1 p_3)]$$

$$= \underline{x_2 p_3 x_3 p_1} - \cancel{x_2 p_3 x_1 p_3} - \cancel{x_3 p_2 x_3 p_1} + \underline{x_3 p_2 x_1 p_3} \\ - \underline{x_3 p_1 x_2 p_3} + \cancel{x_1 p_3 x_2 p_3} + \cancel{x_3 p_1 x_3 p_2} - \underline{x_1 p_3 x_3 p_2}$$

$$= x_2 \underbrace{[p_3, x_3]}_{\hbar/i} p_1 + x_1 \underbrace{[x_3, p_3]}_{-\hbar/i} p_2$$

$$= \frac{\hbar}{i} (x_2 p_1 - x_1 p_2) = i\hbar L_3$$

$$\boxed{[L_j, L_k] = i\hbar L_l}$$

mit (jkl) zyklisch

$$L_1 L_2 - L_2 L_1 = i\hbar L_3$$

$$L_2 L_3 - L_3 L_2 = i\hbar L_1$$

$$L_3 L_1 - L_1 L_3 = i\hbar L_2$$

$$\boxed{\underline{L} \times \underline{L} = i\hbar \underline{L}}$$

Es gibt also keine gemeinsamen Eigenvektoren zu je 2 Drehimpulskomponenten.

Aber: $\boxed{[L^2, L_k] = 0}$ für $k=1, 2, 3$

Beweis: $[L^2, L_3] = [L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, L_3] = [L_1^2, L_3] + [L_2^2, L_3]$

$$= L_1 \underbrace{[L_1, L_3]}_{-i\hbar L_2} + \underbrace{[L_1, L_3] L_1}_{\dots\dots} + L_2 \underbrace{[L_2, L_3]}_{i\hbar L_1} + \underbrace{[L_2, L_3] L_2}_{i\hbar L_1}$$

$$= 0 \quad \square$$

Es gibt also gemeinsame Eigenvektoren zu einem L_k
(Konvention: L_3) und L^2 .

Definition von Leiternoperatoren (vgl. harmon. Osz.):

$$L_+ := L_1 + iL_2 \quad \text{nicht hermitesch}$$

$$L_- := L_1 - iL_2$$

$$\text{Es gilt } (L_+)^{\dagger} = L_- \quad , \quad (L_-)^{\dagger} = L_+$$

Vertauschungsrelationen

$$[L_+, L_3] = \underbrace{[L_1, L_3]}_{-i\hbar L_2} + i \underbrace{[L_2, L_3]}_{i\hbar L_1} = -\hbar(L_1 + iL_2)$$

$$[L_+, L_3] = -\hbar L_+$$

$$[L_-, L_3] = \hbar L_- \quad (\text{adjungierte Form})$$

Verallgemeinerung:

$$[L_+^n, L_3] = -n\hbar L_+^n$$

$$[L_-^n, L_3] = n\hbar L_-^n$$

Beweis durch vollständige Induktion: für $n=1$ gezeigt

Sei Behaupt. richtig für $n \geq 1$. Dann

$$[L_+^{n+1}, L_3] = L_+^n \underbrace{[L_+, L_3]}_{-\hbar L_+} + \underbrace{[L_+^n, L_3]}_{-n\hbar L_+^n} L_+ = -(n+1)\hbar L_+^{n+1} \quad \square$$

Weiter gilt:

$$L_+ L_- = (L_1 + iL_2)(L_1 - iL_2) = L_1^2 + L_2^2 - i[L_1, L_2] = L^2 - L_3^2 + \hbar L_3 \quad (*)$$

$$L_- L_+ = L_1^2 + L_2^2 + i[L_1, L_2] = L^2 - L_3^2 - \hbar L_3$$

$$\Rightarrow [L_+, L_-] = 2\hbar L_3$$

$$[L^2, L_+] = [L^2, L_-] = 0, \quad \text{da } [L^2, L_k] = 0$$

Mittel L_+ , L_- gibt eine Zerlegung von L^2 in mit L^2 vertauschbare Operatoren L_3, L_+, L_- :

$$L^2 = L_3^2 + L_2^2 + L_1^2$$

$$\stackrel{!}{=} L_3^2 + L_+ L_- - \hbar L_3 \quad (*)$$

Eigenwerte und Eigenzustände

Die gemeinsamen (normierten) Eigenvektoren $|a, b\rangle$ von L^2 und L_3 gehorchen den Eigenwertgl.

$$L^2 |a, b\rangle = a |a, b\rangle$$

$$L_3 |a, b\rangle = b |a, b\rangle$$

Da L^2 hermitisch ist, gilt

$$a = \langle a, b | L^2 |a, b\rangle = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\langle a, b | L_i^+ L_i |a, b\rangle}_{\langle \phi_i | \phi_i \rangle \geq 0} \geq \underbrace{\langle a, b | L_3^2 |a, b\rangle}_{b^2 \geq 0}$$

Also $\boxed{a \geq b^2 \geq 0} \quad (*)$

$L_{\pm} |a, b\rangle$ sind auch Eigenzustände zu L^2 und L_3 :

$$L^2 L_{\pm} |a, b\rangle = L_{\pm} L^2 |a, b\rangle = a L_{\pm} |a, b\rangle$$

$$L_3 L_{\pm} |a, b\rangle = (L_{\pm} L_3 - \underbrace{[L_{\pm}, L_3]}_{\pm \hbar L_{\pm}}) |a, b\rangle = L_{\pm} \underbrace{(L_3 \pm \hbar)}_{(b \pm \hbar)} |a, b\rangle$$

$$\text{Also } L_3 (L_{\pm} |a, b\rangle) = (b \pm \hbar) (L_{\pm} |a, b\rangle)$$

d.h. L_{\pm} erhöhen / erniedrigen Eigenwert von L_3 um \hbar ,

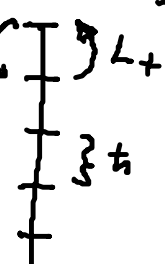
(„Leiteroperatoren“)

EW von L_3 :

n - bzw. m -malige Anwendung bei festem b_0 :

$$L_3 L_+^n |a, b_0\rangle = (b_0 + n\hbar) L_+^n |a, b_0\rangle$$

$$L_3 L_-^m |a, b_0\rangle = (b_0 - m\hbar) L_-^m |a, b_0\rangle$$



Das Spektrum von L_3 ist nach oben und nach unten beschränkt:

$$(*) \quad -\sqrt{a} \leq b \leq \sqrt{a}$$

Also ex. größter Eigenwert $b_{\max} = b_0 + n_{\max} \hbar$
und kleinster Eigenwert $b_{\min} = b_0 - n_{\max} \hbar$

$$\text{mit } L_+ |a, b_{\max}\rangle = 0$$

$$L_- |a, b_{\min}\rangle = 0$$

Daraus folgt

$$0 = L_- L_+ |a, b_{\max}\rangle = (L^2 - L_3^2 - \hbar L_3) |a, b_{\max}\rangle = (a - b_{\max}^2 - \hbar b_{\max}) |a, b_{\max}\rangle$$

$$0 = L_+ L_- |a, b_{\min}\rangle = (L^2 - L_3^2 + \hbar L_3) |a, b_{\min}\rangle = (a - b_{\min}^2 + \hbar b_{\min}) |a, b_{\min}\rangle$$

$$\text{Also } a = b_{\max}^2 + \hbar b_{\max} = b_{\min}^2 - \hbar b_{\min} \quad (1)$$

$$\text{Andererseits ex. } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } |a, b_{\max}\rangle = (L_+)^n |a, b_{\min}\rangle$$

$$\text{also } \boxed{b_{\max} = b_{\min} + n \hbar} \quad (2)$$