

English Summary:

### 3. Angular momentum

Angular momentum op  $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$

$$\boxed{[L_j, L_k] = i\hbar L_l} \quad (jkl) \text{ cyclic} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\underline{L} \times \underline{L} = i\hbar \underline{L}}$$

$$\boxed{[L^2, L_k] = 0} \quad \Rightarrow \quad \text{there exist common eigenvectors for } L^2, L_3$$

Ladder operators:  $L_+ = L_1 + iL_2$        $(L_+)^{\dagger} = L_-$

$$L_- = L_1 - iL_2 \quad (L_-)^{\dagger} = L_+$$

$$[L_+, L_3] = -\hbar L_+, \quad [L_-, L_3] = \hbar L_-, \quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_3$$

$$L^2 |a, b\rangle = a |a, b\rangle$$

$$L_3 |a, b\rangle = b |a, b\rangle$$

$$-\sqrt{a} \leq b \leq \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow a = b_{\max}^2 + \hbar b_{\max} = b_{\min}^2 - \hbar b_{\min} \quad (1)$$

$$\boxed{b_{\max} = b_{\min} + n\hbar} \quad (2)$$

$$(2) \text{ in } (1) \text{ eingesetzt: } \cancel{b_{\min}^2} + 2n\hbar b_{\min} + (n\hbar)^2 + \hbar(b_{\min} + n\hbar) = \cancel{b_{\min}^2} - \hbar b_{\min}$$

$$\Rightarrow b_{\min} = -\frac{n(n+1)\hbar^2}{2(n+1)\hbar} = -\frac{n}{2}\hbar =: -l\hbar$$

mit:  $\boxed{l := \frac{n}{2}}$

$$\Rightarrow a \stackrel{(1)}{=} b_{\min} (b_{\min} - \hbar) = (-l)(-l-1)\hbar^2$$

$$\boxed{a = l(l+1)\hbar^2}, \quad b_{\max} = b_{\min} + 2l\hbar = l\hbar$$

Mögliche Eigenwerte von  $L^2$ :  $a = l(l+1)\hbar^2$

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Mögliche Eigenwerte von  $L_z$  für festes  $l$ :

$$b = m\hbar \quad \text{mit} \quad m = \underbrace{-l}_{b_{\min}}, -l+1, -l+2, \dots, l-2, \underbrace{l-1, l}_{b_{\max}}$$

Es können keine weiteren Eigenwerte von  $L_z$  zwischen diesen Werten liegen, weil man sonst durch wiederholte Anwendung von  $L_+$  bzw.  $L_-$  die Schranken  $|m| \leq l$  verletzen könnte.

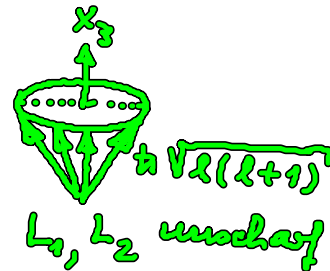
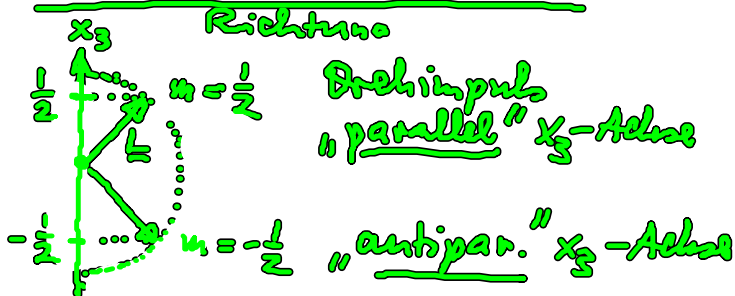
Zu jedem  $l$  gibt es  $2l+1$  Werte von  $m$ :  
 $(2l+1)$ -fache Richtungsentartung von  $L^2$ .

Drehimpuls-Quantenzahl	Eigenwert von $L^2$	Richtungsquantenzahl
$l$	$\hbar^2 l(l+1)$	$m$
$0$	$0$	$0$
$\frac{1}{2}$	$\hbar^2 \frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$
$1$	$\hbar^2 2$	$-1, 0, +1$
$\frac{3}{2}$	$\hbar^2 \frac{15}{4}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

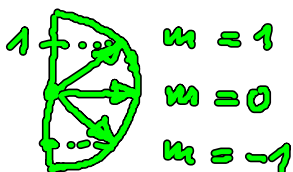
$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$$

$$L_z |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle$$

Dirac'sches Vektormodell:



$$l = \frac{1}{2}$$



$$l=1$$

NB: Die Drehimpulsquantisierung ist eine Folge der Nichtvertauschbarkeit der Komponenten von  $\underline{L}$ .

### 3.2 Ortsdarstellung des Bahndrehimpulses

$$\langle \underline{r} | \underline{p} | l m \rangle = \frac{\hbar}{i} \nabla \psi_{lm}(\underline{r})$$

$$\langle \underline{r} | \underline{r} | l m \rangle = \underline{r} \psi_{lm}(\underline{r})$$

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \quad \text{ergibt:} \quad (\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i})$$

$$\langle \underline{r} | L_3 | l m \rangle = \frac{\hbar}{i} (x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1) \psi_{lm}(\underline{r}) \stackrel{!}{=} \hbar m \psi_{lm}(\underline{r})$$

Kugelkoordinaten:

$$x_1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$x_3 = r \cos \vartheta$$

$$\Rightarrow x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar m \psi_{lm}(\vartheta, \varphi)} \quad \text{Eigenwertgl. für } L_3$$

$$\text{Lösung } \psi_{lm}(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} f_{lm}(\vartheta), \quad m = -l, \dots, l$$

$$\underline{\text{Eindeutigkeit}}: e^{im\varphi} \stackrel{!}{=} e^{im(\varphi + 2\pi)}$$

$$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$  Für Bahndrehimpulse sind nur ganzzahlige  $l$ -Werte zulässig.

Leiteroperatoren:

$$\langle \underline{r} | L_{\pm} | l m \rangle = \frac{\hbar}{i} [x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2 \pm i x_3 \partial_1 \mp i x_1 \partial_3] \psi_{lm}(\underline{r})$$

$$= h e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi_{lm}(r, \vartheta, \varphi)$$

$$= h e^{i(m \pm 1)\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \varphi} - m \cot \vartheta \right) f_{lm}(r, \vartheta)$$

Für  $m=l$  (Maximalwert) ist

$$L_+ |l, l\rangle = 0$$

$$\Rightarrow h e^{i(l+1)\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} - l \cot \vartheta \right) f_{ll}(r, \vartheta) = 0$$

Lösung:  $\int \frac{df_{ll}}{f_{ll}} = l \int \cot \vartheta d\vartheta = l \ln(\sin \vartheta)$

$$f_{ll}(r, \vartheta) = \underbrace{(-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}} \frac{1}{2^l l!}}_{\text{Normierungsfaktor}} (\sin \vartheta)^l R_{ll}(r)$$

Erzeugung der anderen  $f_{lm}$ :

$$\psi_{l, l-1}(r) \sim \langle r | L_- |l, l\rangle = h e^{i(l-1)\varphi} \left( -\frac{\partial}{\partial \varphi} - l \cot \vartheta \right) f_{ll}(r, \vartheta)$$

$$= h e^{i(l-1)\varphi} (\sin \vartheta)^{l-2} \frac{\partial}{\partial(\cos \vartheta)} \left[ (\sin \vartheta)^l f_{ll}(r, \vartheta) \right]$$

Normierung:

$$\psi_{lm}(r, \vartheta, \varphi) = R_{lm}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

mit den Kugelflächenfunktionen

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{2(l-m)!}} \frac{1}{(\sin \vartheta)^m} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \vartheta)^{l-m}} (\sin \vartheta)^{2l}$$

$$= \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta)$$

wobei  $P_l(x) := \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l$  Legendre-Polynom  
 $l$ -ter Grade

$P_l^m(x) := (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$  zugeordnetes  
 Legendre-Polynom  
 $(m \geq 0)$

Die Kugelflächenfunktionen sind orthonormiert :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta [Y_l^m(\vartheta, \varphi)]^* Y_{l'}^{m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Vollständiges ONS, nach dem sich Funktionen auf der Einheitskugel entwickeln lassen :







$$F(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_l^m Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

Eigenschaften:  $(Y_l^m)^* = (-1)^m Y_l^{-m}$

Inversion am Ursprung :  $\underline{r} \rightarrow -\underline{r}$   
 d.h.  $(\vartheta, \varphi) \rightarrow (\pi - \vartheta, \varphi + \pi)$

$$Y_l^m(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

$\Rightarrow$  Bahndrehimpuls-Eigenzustände  $|lm\rangle$  haben die Parität  $(-1)^l$

$Y_l^m$	Knotenlinien von $\text{Re } Y_l^m$	$l$	$m$	Parität
$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$		0	0	gerade (s-Orbital)
$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$		1	0	ungerade (p-Orbital)
$Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$			$\pm 1$	
$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\vartheta - 1)$		2	0	gerade (d-Orbitale)
$Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta e^{\pm i\varphi}$			$\pm 1$	
$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta e^{\pm 2i\varphi}$			$\pm 2$	

Veranschaulichung durch Mathematica Applets:

s. Weblink auf VL-Seite zu OWL  
(Visualisierungen der Quantenmechanik)