English Summary:

4.5 Identical particles: Spin and statistics

N-particle Schrödinger eq. $\hat{H}|a_1, a_2, \dots, a_N\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|a_1, a_2, \dots, a_N\rangle$

microscopic particles with same quantum numbers are indistinguishable

Permutation op. $\hat{P}_{(ij)}$ → conserved

$\hat{P}_{(ij)}\psi = \lambda_{ij}\psi \Rightarrow \boxed{\lambda_{ij} = \pm 1}$ ↗ symmetric: <u>bosons</u> $(s = 0, 1, \dots)$ ↘ antisymmetric: <u>fermions</u> $(s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$

antisymmetrization op. $\hat{A} := \frac{1}{N!}\sum_{g=1}^{N!}(-1)^p \hat{P}_{(g)}$ $\qquad \hat{A}^2 = \hat{A}, \quad \hat{A} = \hat{A}^+$

symmetrization op. $\hat{S} := \frac{1}{N!}\sum_{g=1}^{N!}\hat{P}_{(g)}$ $\qquad \hat{S}^2 = \hat{S}, \quad \hat{S} = \hat{S}^+$

Projectors

5. Näherungsmethoden

5.1 Zeitabhängige Störungsrechnung (Dirac)

Es soll die <u>zeitliche Entwicklung</u> eines Zustandes $|\psi\rangle_t$ aus der Schrödingergl.

$$\hat{H}|\psi\rangle_t = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_t$$

berechnet werden, wobei

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1(t)$$

Störung $\hat{H}^1 = \varepsilon \hat{V}$ (evt. explizit zeitabh.!)
mit kleinem Parameter ε

Eigenwerte und -zustände von $\hat{H}^0$ seien bekannt:

$$\boxed{\hat{H}^0 |n\rangle = E_n |n\rangle}$$ ungestörtes Problem

(Annahme: diskretes Spektrum)

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$$

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$$

Entwicklung von $|\psi\rangle_t$ nach den ungestörten Eigenzuständen $|n\rangle$:

$$|\psi\rangle_t = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle_t}_{c_n(t)} = \sum_n c_n(t)|n\rangle$$

Anfangsbed. sei ein ungestörter Eigenzustand $|n_0\rangle$:

$$|\psi\rangle_{t=0} = |n_0\rangle \quad \Rightarrow \quad c_n(0) = \delta_{nn_0}$$

Zeitentwicklung unter dem Einfluss der Störung:

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n}{dt}|n\rangle = \sum_n c_n(t)\Big(\underbrace{\hat{H}^0|n\rangle}_{E_n|n\rangle} + \hat{H}^1(t)|n\rangle\Big)$$

Linksmultiplikation mit $\langle m|$:

$$i\hbar \frac{dc_m}{dt} = E_m c_m(t) + \sum_n \langle m|\hat{H}^1|n\rangle c_n(t) \quad (*)$$

Definiere $g_n(t)$ durch $c_n(t) = \underbrace{e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}}_{\text{Zeitentwickl. der ungestörten Zustände von } (*) \text{ für } \hat{H}^1=0} g_n(t)$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{dc_m}{dt} = E_m c_m(t) + e^{-i\frac{E_m t}{\hbar}}\, i\hbar \frac{dg_m}{dt}$$

eingesetzt in (*):

$$\boxed{i\hbar \frac{dg_m}{dt} = \sum_n \exp\left\{\frac{i(E_m-E_n)t}{\hbar}\right\} \langle m|\hat{H}'|n\rangle g_n(t)}$$

Störungsentwicklung für kleines ε mit $\hat{H}' = \varepsilon \hat{V}$:

$$g_n(t) = g_n^{(0)}(t) + \varepsilon g_n^{(1)}(t) + \varepsilon^2 g_n^{(2)}(t) + \dots$$

<u>Koeffizientenvergleich</u> in Ordnung ε^ν:

<u>$\nu = 0$</u>: $i\hbar \frac{dg_m^{(0)}}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{g_m^{(0)}(t) = \text{const.} \overset{!}{=} \delta_{m n_0}} \quad \left(\begin{array}{l}\text{exakte Lösung für } \varepsilon = 0:\\ c_m(t) = e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t}\delta_{m n_0}\end{array}\right)$$

<u>$\nu = 1$</u>:

$$i\hbar \frac{dg_m^{(1)}}{dt} = \sum_n \exp\left\{\frac{i(E_m-E_n)t}{\hbar}\right\} \langle m|\hat{V}|n\rangle \underbrace{g_n^{(0)}}_{\delta_{n n_0}}$$

$$= \exp\left\{\frac{i(E_m-E_{n_0})t}{\hbar}\right\} \langle m|\hat{V}|n_0\rangle$$

Anf.bed. $g_n^{(1)}(0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{g_m^{(1)} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t d\tau \exp\left\{\frac{i(E_m-E_{n_0})\tau}{\hbar}\right\} \langle m|\hat{V}|n_0\rangle}$$

<u>Übergangswahrscheinlichkeit</u>

Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t den Zustand $|n\rangle$ zu finden, wenn für $t=0$ $|n_0\rangle$ vorliegt:

$$P_{n n_0} = |\langle n|\psi\rangle_t|^2 = \left|\sum_{n'} c_{n'}(t) \underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}}\right|^2 = |c_n(t)|^2 = |g_n(t)|^2$$

<u>Näherung</u>: niedrigste, nichtverschwindende Ordnung

$$g_n(t) = \begin{cases} g_n^{(0)} = \delta_{n n_0} = 1 & \text{für } n = n_0 \\ \varepsilon g_n^{(1)} & \text{für } n \neq n_0 \end{cases}$$

(a) <u>Zeitunabhängige Störung</u> : $\hat{V} = \text{const.}$

$$g_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau \, \exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0})\tau}{\hbar}\right\} \langle n|\hat{V}|n_0\rangle$$

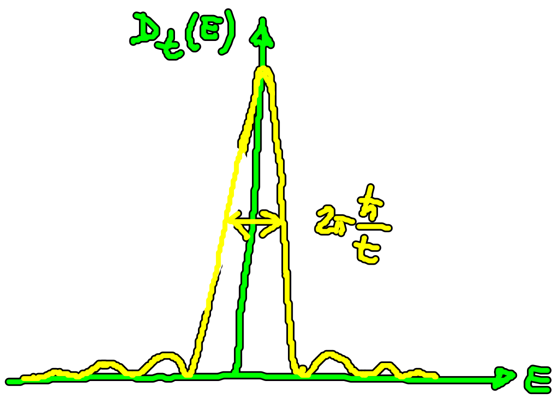
$$= -\langle n|\hat{V}|n_0\rangle \frac{\exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0})t}{\hbar}\right\} - 1}{E_n - E_{n_0}}$$

$$|g_n^{(1)}(t)|^2 = |\langle n|\hat{V}|n_0\rangle|^2 \frac{\left(e^{-i\Omega t} - 1\right)\left(e^{i\Omega t} - 1\right)}{\hbar^2 \Omega^2}$$

mit $\Omega := \frac{E_n - E_{n_0}}{\hbar}$ Übergangsfrequenz

$$= |\langle n|\hat{V}|n_0\rangle|^2 \frac{2(1 - \cos\Omega t)}{\hbar^2\Omega^2}$$

$$= |\langle n|\hat{V}|n_0\rangle|^2 \underbrace{\frac{4\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right)}{\hbar^2\Omega^2}}_{=: D_t(E_n - E_{n_0})}$$



$$D_t(0) = \left(\frac{t}{\hbar}\right)^2 \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \, D_t(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{4}{E^2}\sin^2\Big(\underbrace{\frac{Et}{2\hbar}}_{\xi}\Big) = \frac{2t}{\hbar}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}}_{\pi}$$

Also $D_t(E) =: \frac{2\pi}{\hbar} t \, \delta_t(E) \longrightarrow \frac{2\pi}{\hbar} t \, \delta(E)$ für $t \to \infty$

$$\Rightarrow \boxed{|\langle n|\psi\rangle_t|^2 = |g_n(t)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|\hat{H}'|n_0\rangle|^2 \, t \, \delta_t(E_n - E_{n_0})}$$

Für $t \to \infty$: Energieerhaltung $E_n - E_{n_0} = 0$

Für $t < \infty$ hat $D_t(E)$ die Breite $\Delta E \approx \frac{2\pi\hbar}{t}$

$\Rightarrow$ Energie – Zeit – Unschärferelation $\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \approx 2\pi\hbar}$

Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit (von n_0 nach n) : Rate

$$\boxed{W_{nn_0} = \frac{d}{dt} |\langle n|\psi\rangle_t|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n|\hat{H}^1|n_0\rangle|^2 \, \delta(E_n - E_{n_0})}$$

(Fermi's Goldene Regel; Störungstheorie 1. Ordnung für $t \to \infty$)

(b) Harmonische zeitabhängige Störung

$$\hat{H}^1(t) = \hat{F} e^{-i\omega t} + \hat{F}^+ e^{i\omega t} \quad \text{(hermitesch!)}$$

$$a_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)\tau}{\hbar}\right\} \langle n|\hat{F}|n_0\rangle$$

$$- \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)\tau}{\hbar}\right\} \langle n|\hat{F}^+|n_0\rangle$$

$$= -\langle n|\hat{F}|n_0\rangle \frac{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)t\right\} - 1}{E_n - E_{n_0} - \hbar\omega}$$

$$- \langle n|\hat{F}^+|n_0\rangle \frac{\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)t\right\} - 1}{E_n - E_{n_0} + \hbar\omega}$$

$$|\langle n|\psi\rangle_t|^2 = |a_n|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n|\hat{F}|n_0\rangle|^2 \, t \; \delta(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)$$

$$+\frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle n|\hat F^+|n_0\rangle\right|^2 t\,\delta(E_n-E_{n_0}+\hbar\omega)$$

$$+\underbrace{\langle n|\hat F|n_0\rangle^*\langle n|\hat F^+|n_0\rangle}_{Ae^{-i\gamma}}\frac{(e^{-i\Omega^- t}-1)(e^{i\Omega^+ t}-1)}{\hbar^2\Omega^-\Omega^+}$$

$$+\underbrace{\langle n|\hat F^+|n_0\rangle^*\langle n|\hat F|n_0\rangle}_{Ae^{i\gamma}}\frac{(e^{-i\Omega^+ t}-1)(e^{i\Omega^- t}-1)}{\hbar^2\Omega^-\Omega^+}$$

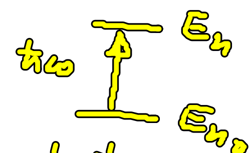
$$= \frac{4A\cos(\omega t-\gamma)}{\hbar^2\Omega^+\Omega^-}\left[\cos\omega t-\cos\Omega t\right]$$

Oszillierende Terme für $\omega\neq 0$, $\Omega\neq 0$, für $t\to\infty$ vernachlässigbar gegen $\sim t\,\delta(\hbar\Omega^\pm)$

mit $\Omega^\pm := \Omega\pm\omega = \dfrac{E_n-E_{n_0}\pm\hbar\omega}{\hbar}$

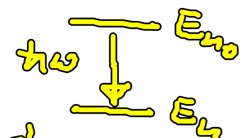
Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit für $t\to\infty$ von n_0 nach n:

$$W_{nn_0} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle n|\hat F|n_0\rangle\right|^2\delta(E_n-E_{n_0}-\hbar\omega)$$



Absorption eines Quants $\hbar\omega$

$$+\frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle n_0|\hat F|n\rangle\right|^2\delta(E_n-E_{n_0}+\hbar\omega)$$



stimulierte Emission eines Quants $\hbar\omega$