Binomialverteilung:

$$W_N(N_1) = \frac{N!}{N_1!\,N_2!}\, p_1^{N_1}\, p_2^{N_2}$$

$$N_1 + N_2 = N$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^{N} W_N(N_1)\, N_1 = N p_1$$

1. Moment

N groß

Maximum am Mittelwert

$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2 \rangle = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2 = N p_1 p_2$$

relative Schwankung: $\frac{\sqrt{\langle \Delta N_1^2 \rangle}}{\langle N_1 \rangle} \sim \sqrt{\frac{1}{N}}$!

Was passiert bei $N \to \infty$?

Taylorentwicklung von $\ln W_N(N_1)$ um den Mittelwert

$$\ln W_N(N_1) = \ln W_N(\langle N_1 \rangle) + \cancel{\left.\frac{d \ln W_N(N_1)}{d N_1}\right|_{N_1 = \langle N_1 \rangle} (N_1 - \langle N_1 \rangle)}$$

$$+ \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} \right|_{N_1 = \langle N_1 \rangle} \left(N_1 - \langle N_1 \rangle \right)^2$$

$$+ \ldots$$

2. Ableitung?

$$\ln W_N(N_1) = \ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! + N_1 \ln p_1 + N_2 \ln p_2$$

$$\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} = -\ln N_1 + \ln (N - N_1) + \ln p_1 - \ln p_2$$

für $N_1 \gg 1$!

$$\frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} = \left(-\frac{1}{N_1} - \frac{1}{(N - N_1)} \right)_{N_1 = \langle N_1 \rangle}$$

$$= -\frac{1}{\langle N_1 \rangle} - \frac{1}{N - \langle N_1 \rangle}$$

$$= -\frac{1}{Np_1} - \frac{1}{N - Np_1} = -\frac{1}{Np_1} - \frac{1}{N\underbrace{(1 - p_1)}_{p_2}} = \frac{-\overbrace{(p_1 + p_2)}^{1}}{Np_1p_2}$$

$$\left. \frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} \right|_{N_1 = \langle N_1 \rangle} = -\frac{1}{N p_1 p_2}$$

$$= -\frac{1}{\langle(\Delta N_1)^2\rangle} < 0$$

negatives Vorzeichen reflektiert, daß wir um das Maximum herum entwickeln

und: Koeffizient 2. Ordnung wird für große N sehr klein!

$$\ln W_N(N_1) = \ln W_N(\langle N_1\rangle) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N p_1 p_2}\right)(N_1 - \langle N_1\rangle)^2 + \cancel{O(N_1 - \langle N_1\rangle)^3}$$

löse nach $W_N(N_1)$ auf

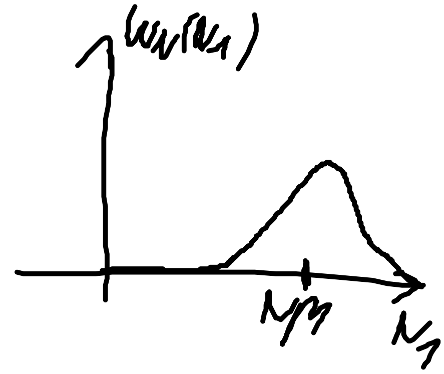
$$\Rightarrow \hat{W}_N(N_1) = W_N(\langle N_1\rangle)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(N_1 - \langle N_1\rangle)^2}{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}$$

richtiger Vorfaktor wird durch Normierung bestimmt

$$\sum_{N_1=0}^{N} \hat{W}_N(N_1) = 1$$

$$\sum_{N_1=0}^{N} \hat{W}_N(N_1) \approx \int_0^N dx\, \hat{W}_N(x)$$

Näherung
N_1 ist kontinuierlich



$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \hat{W}_N(x)\,dx$$

$$\stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underbrace{W_N(\bar{x})}_{\text{Vorfaktor: Konstant!}}\; e^{-\frac{(x-\langle N_1\rangle)^2}{2\langle(\Delta N_1)^2\rangle}} \stackrel{!}{=} 1$$

benutze: Gaussintegral

$$\int^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx\, W_N(\bar{x})\, e^{-\frac{(x-\langle N_1\rangle)^2}{2\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}$$

$$= W_N(\bar{x}) \sqrt{2\pi}\; \overline{\Delta N_1} \qquad \overline{\Delta N_1} = \sqrt{\langle(\Delta N_1)^2\rangle}$$

$$\overset{!}{=} 1 \qquad \Longrightarrow W_N(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\overline{\Delta N_1}}$$

Insgesamt

$$\hat{W}_N(N_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\overline{\Delta N_1}}\, e^{-\frac{(x-\langle N_1\rangle)^2}{2\langle(\Delta N_1)^2\rangle}}$$

Grenzwert der Binomialverteilung für große N $\Longrightarrow$ normierte Gaußverteilung

I.3. Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben eine Summe von Zufallsgrößen, die durch unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen charakterisiert sind

$$X = S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_N$$

Beispiel: S_i sind die Energien einzelner Atome in ~~ih~~ einem idealen Gas

nicht wechselwirkend

X ist dann die Gesamtenergie

Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X im Grenzfall sehr großer N ??

Annahme:

Die s_i sind kontinuierliche Variablen mit Verteilungen $w_i(s_i)$, $i=1,\ldots,N$

es gilt $\forall\, i=1,\ldots,N$

$$\int^{\infty} ds_i \; w_i(s_i) = 1$$

alle Momente sollen existieren!

$$\Rightarrow \langle s_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_i \; s_i \, w_i(s_i)$$

$$\Rightarrow \langle (\Delta s_i)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_i \; (s_i - \langle s_i \rangle)^2 \, w_i(s_i)$$

analog $\langle s^n \rangle$

Statistische Unabhängigkeit

→ Wahrsch., daß s_1 Wert zwischen s_1 und $s_1 + ds_1$ hat, und daß s_2 Wert zw. s_2 und $s_2 + ds_2$ hat ...

$$w_1(s_1)\,ds_1\, w_2(s_2)\,ds_2 \cdot \ldots \cdot w_N(s_N)\,ds_N$$

$$X = s_1 + s_2 + \ldots + s_N$$

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1\, w_1(s_1) \ldots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N\, w_N(s_N)\,(s_1 + s_2 + \ldots + s_N)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ds_1\, w_1(s_1)\, s_1 \cdot \int ds_2\, w_2(s_2) \ldots \int ds_N\, w_N(s_N)$$

+ analog für s_2

$$= \langle s_1 \rangle$$

$$+\langle s_2\rangle \ldots + \langle s_N\rangle$$

$$\langle x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle s_i\rangle$$

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{N} s_i}$$

analog:

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{N} s_i \sum_{j=1}^{N} s_j\rangle$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \langle s_i\rangle \sum_{j=1}^{N} \langle s_j\rangle$$

$$* \quad \langle(\Delta x)^2\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\langle s_i s_j\rangle - \langle s_i\rangle\langle s_j\rangle\right)$$

benutze statistische Unabhängigkeit

$$\langle s_i s_j\rangle = \langle s_i\rangle\langle s_j\rangle$$

falls $i \neq j$!

$$\begin{matrix} i=1 \\ j=2 \end{matrix} \quad \int_{-\infty}^{\infty} ds_1\, w_1(s_1) \int_{-\infty}^{\infty} ds_2\, w_2(s_2)\, s_1 s_2$$

$$= \underbrace{\int ds_1\, w_1(s_1)\, s_1}_{\langle s_1 \rangle} \underbrace{\int ds_2\, w_2(s_2)\, s_2}_{\langle s_2 \rangle}$$

aus ⊛

$$\Rightarrow \langle (\Delta x)^2 \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\langle s_i^2 \rangle - \langle s_i \rangle^2 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \langle (\Delta s_i)^2 \rangle$$

Wie ist x nun verteilt?

Betrachte die Wahrsch., daß die Summe $s_1 + s_2 + \ldots + s_N$ einen bestimmten Wert x hat

⊛

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1\, w_1(s_1) \ldots \int_{-\infty}^{\infty} ds_2\, w_N(s_N)$$

$$\times\, \delta\left(x - \sum_{i=1}^{N} s_i\right)$$

Integriere also über alle diejenigen Werte von den s_i, die zu dem vorgegeben x führen!

beachte:

Aus $*$ folgt sofort, dass $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x) = 1$

denn $\int_{-\infty}^{\infty} dy\, \delta(y-a) = 1$

Zur Auswertung benutzen wir:

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-iky}$$

Einsetzen in $*$ (mit $y = x - \sum_{i=1}^{N} s_i$)

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1\, w_1(s_1) \cdots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N\, w_N(s_N)$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-ikx}\, e^{ik(s_1+s_2+\dots+s_N)}$$

"mal"

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \prod_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} ds_j \, w_j(s_j) e^{iks_j}$$

Produkt

führe ein: $w_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_j \; w_j(s_j) \, e^{iks_j}$

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \prod_{j=1}^{N} w_j(k)$$

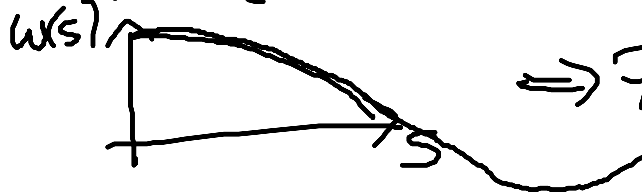
beachte $w_j(k) = \langle e^{iks_j} \rangle$ charakterist. Funktion!

Wir entwickeln nun die Funktion $w_j(k)$ für kleine k

Begründung:

große k: e^{iks} entspricht sehr kurzwellige Oszillation $\Rightarrow$ geringer Beitrag zum Integral!

kleine k: langwellige Oszillation $\Rightarrow$ Form von $w(s)$ wird wichtig



$$w_j(k) = \int_{-\rho}^{\rho} ds_j \, w_j(s_j) \, e^{iks_j}$$

$$= \int_{-\rho}^{\rho} ds_j \, w_j(s_j) \left(1 + iks_j - \frac{1}{2} k^2 s_j^2 + O(k^3)\right)$$

$$= 1 + ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle + O(k^3)$$

$$\ln \prod_{j=1}^{N} w_j(k) = \sum_{j=1}^{N} \ln w_j(k)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \ln\left(1 + ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle \ldots\right)$$

benutze nun noch

$$\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2} + \dots$$

wobei $y = ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2}k^2 \langle s_j^2 \rangle$

(bei Vernachlässigung der Terme $O(k^3)$)

$$\ln \prod_{j=1}^{N} w_j(k) = \sum_{j=1}^{N} \ln w_j(k)$$

$$\approx \sum_{j=1}^{N} \Big(\underbrace{ik\langle s_j \rangle - \frac{1}{2}k^2 \langle s_j^2 \rangle}_{\text{aus } y} \underbrace{- \frac{1}{2}(ik\langle s_j \rangle)^2}_{\text{aus } -\frac{y^2}{2}} + O(k^3)$$

benutze Zusammenhänge zw.

$\langle s_j^n \rangle$ und $\langle x^n \rangle$

$$\Longrightarrow \ln \prod_{j=1}^{N} w_j(k) = ik\langle x \rangle - \frac{1}{2}k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle$$

$$\left(\text{w.g.} \quad \langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_{j=1}^{N} \left(\langle s_j^2 \rangle - \langle s_j \rangle^2 \right) \right)$$

löse auf:

$$\prod_{j=1}^{N} w_j(k) \approx e^{ik\langle x \rangle - \frac{k^2}{2}\langle (\Delta x)^2 \rangle}$$

für kleine k

Einsetzen in den Ausdruck für die Wahrsch.verteilung

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \prod_{j=1}^{N} w_j(k)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ikx} \, e^{ik\langle x \rangle - \frac{k^2}{2}\langle (\Delta x)^2 \rangle}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{-ik(x - \langle x \rangle) - \frac{k^2}{2}\langle (\Delta x)^2 \rangle}$$

benutze: $$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\alpha y^2 + \beta y} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\beta^2/4\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta x}\, e^{-\frac{1}{2\langle(\Delta x)^2\rangle}(x - \langle x\rangle)^2}}$$

Gaußverteilung!

Beachte:
Dies gilt, obwohl wir keine speziellen Annahmen über die Einzelverteilung $w_i(s_i)$ gemacht haben!

nur wichtig, daß die Momente existieren und die Einzel~~erg~~ereignisse s_i statistisch unabhängig sind!