

Binomialverteilung:

$$W_N(N_1) = \frac{N!}{N_1! N_2!} p_1^{N_1} p_2^{N_2}$$

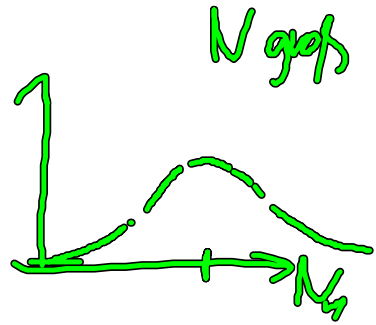
$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N W_N(N_1) N_1$$

↑  
=  $N p_1$   
1. Moment

$$N_1 + N_2 = N$$

$$p_2 = 1 - p_1$$

Maximum am Mittelwert



$$\langle (\Delta N_1)^2 \rangle = \langle (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2 \rangle = \langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2$$

$$\text{relative Schwankung: } \frac{\langle \Delta N_1 \rangle}{\langle N_1 \rangle} \sim \sqrt{\frac{1}{N}} !$$

Was passiert bei  $N \rightarrow \infty$  ?

Taylorentwicklung von  $\ln W_N(N_1)$   
um den Mittelwert

$$\ln W_N(N_1) = \ln W_N(\langle N_1 \rangle)$$

~~$$+ \frac{d \ln W_N(N_1)}{d N_1} \bigg|_{N_1 = \langle N_1 \rangle} (N_1 - \langle N_1 \rangle)$$~~

$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} \bigg|_{N_1 = \langle N_1 \rangle}^?$$

$$+ \dots$$

2. Ableitung?

$$\ln W_N(N_1) = \ln N! - \ln N_1! - \ln N_2! \\ + N_1 \ln p_1 + N_2 \ln p_2$$

$$\frac{d \ln W_N(N_1)}{dN_1} = -\ln N_1 + \ln(N - N_1) + \ln p_1 - \ln p_2$$

für  $N_1 \gg 1$ !

$$\frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} = \left( -\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N - N_1} \right) \bigg|_{N_1 = \langle N_1 \rangle}$$

$$= -\frac{1}{\langle N_1 \rangle} - \frac{1}{N - \langle N_1 \rangle}$$

$$= -\frac{1}{N p_1} - \frac{1}{N - N p_1} = -\frac{1}{N p_1} - \frac{1}{N \left(\frac{p_2}{p_1}\right)} = -\frac{1}{N p_1 p_2}$$

$$\frac{d^2 \ln W_N(N_1)}{dN_1^2} \bigg|_{N_1 = \langle N_1 \rangle} = -\frac{1}{N p_1 p_2}$$

$$= -\frac{1}{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle} < 0$$

negatives Vorzeichen bedeutet, dass wir am  
das Maximum herum entwickeln

und: Koeffizient 2. Ordnung wird für große  $N$   
sehr klein!

$$\ln W_N(N_1) = \ln W_N(\langle N_1 \rangle)$$

$$+ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{N p_1 p_2} \right) (N_1 - \langle N_1 \rangle)^2$$

$$+ \cancel{O\left(\frac{1}{N^2} \langle N_1 \rangle^3\right)}$$

löse nach  $W_N(N_1)$  auf

$$- \frac{1}{2} \frac{(N_1 - \langle N_1 \rangle)^2}{\langle (\Delta N_1)^2 \rangle}$$

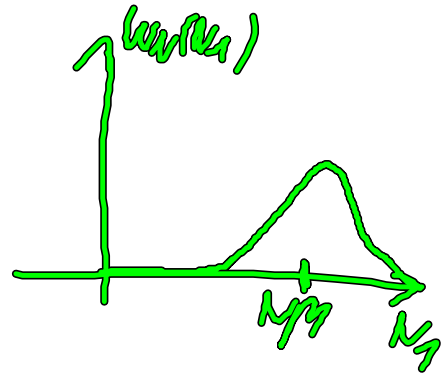
$$\Rightarrow \tilde{W}_N(N_1) = W_N(\langle N_1 \rangle) e$$

nichtiger  
Vorfaller wird durch Varianz bestimmt

$$\sum_{N_1=0}^N \tilde{W}_N(N_1) = 1$$

$$\sum_{N_1=0}^N \tilde{w}_N(N_1) \approx \int_0^N dx \tilde{w}_N(x)$$

Näherung  
 $N_1$  ist kontinuierlich



$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_N(x) dx$$

$$\stackrel{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{w_N(x)}_{\text{Verfallta: konstant!}} e^{-\frac{(x - \langle N_1 \rangle)^2}{2 \langle \Delta N_1^2 \rangle}} \stackrel{!}{=} 1$$

benutze: Gaussintegral

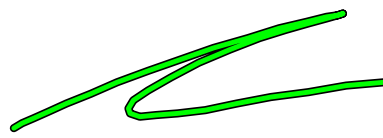
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx w_N(x) e^{-\frac{(x-\mu_N)^2}{2\sigma_N^2}} \\ = w_N(\bar{x}) \sqrt{2\pi} \sigma_N \quad \left/ \begin{array}{l} \Delta \mu_N \\ = \sqrt{K \mu_N} \end{array} \right. \\ \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow w_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_N} \end{aligned}$$

Insgesamt

$$\hat{w}_N(N_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_N} e^{-\frac{(x-\mu_N)^2}{2\sigma_N^2}}$$

Grenzwert der  
Binomialverteilung  
für große  $N$



normales  
Gaußverteilung

## I.3. Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben eine Summe von Zufallsgrößen, die durch unabhängige lokale Scheinlichkeitsverteilungen charakterisiert sind

$$X = S_1 + S_2 + \dots + S_N$$

Beispiel:  $S_i$  sind die Energien  
einzelner Atome in einem  
idealen Gas

← nicht unterscheidbar

$X$  ist dann die Gesamtenergie

Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $X$   
im Grenzfall sehr große  $N$  ??

Annahme:

Die  $S_i$  sind kontinuierliche Variablen  
mit Verteilung  $w_i(s_i)$ ,  $i=1, \dots, N$

es gilt  $\forall i=1, \dots, N$   $\int ds_i w_i(s_i) = 1$

alle Momente sollen existieren!

$$\begin{cases} \Rightarrow \langle S_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_i s_i w_i(s_i) \\ \Rightarrow \langle (\Delta S_i)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} ds_i (s_i - \langle S_i \rangle)^2 w_i(s_i) \\ \text{analog } \langle S^n \rangle \end{cases}$$

## Statistische Unabhängigkeit

→ Wahrsch., dass  $s_1$  Wert zwischen  $s_1$  und  $s_1 + ds_1$  hat, und dass  $s_2$  Wert zw.  $s_2$  und  $s_2 + ds_2$  hat ...

$$w_1(s_1) ds_1 w_2(s_2) ds_2 \dots \dots w_N(s_N) ds_N$$

$$X = S_1 + S_2 + \dots + S_N$$

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 w_1(s_1) \dots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N w_N(s_N) (s_1 + s_2 + \dots + s_N) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 w_1(s_1) s_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 w_2(s_2) \dots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N w_N(s_N) \\ &\quad + \text{analog } \text{für } s_2 \end{aligned}$$

$$= \langle S_1 \rangle$$

$$+ \langle S_2 \rangle \dots + \langle S_N \rangle$$

$$\langle X \rangle = \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle$$

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^N S_i}$$

analog:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta X)^2 \rangle &= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N S_i \sum_{j=1}^N S_j \right\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \langle S_i \rangle \sum_{j=1}^N \langle S_j \rangle \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} \langle (\Delta X)^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \right)$$

benutze statistische Unabhängigkeit

$$\langle S_i S_j \rangle = \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

falls  $i \neq j$  !

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 w_1(s_1) \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 w_2(s_2) S_1 S_2$$



$$= \underbrace{\int ds_1 w_1(s_1) s_1}_{\langle s_1 \rangle} \underbrace{\int ds_2 w_2(s_2) s_2}_{\langle s_2 \rangle}$$

aus ③

$$\rightarrow \langle (\Delta x)^2 \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^N (\langle s_i^2 \rangle - \langle s_i \rangle^2)$$

$$= \sum_{i=1}^N \langle (\Delta s_i)^2 \rangle$$

Wie ist  $x$  nun verteilt?

Betrachte die Wahsch., dass die Summe  $s_1 + s_2 + \dots + s_N$  einen bestimmten Wert  $x$  hat

$$\textcircled{*} P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 w_1(s_1) \dots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N w_N(s_N)$$

$$\times \delta\left(x - \sum_{i=1}^N s_i\right)$$

Integriere also über alle diejenigen Werte von den  $s_i$ , die zu dem vorgegebenen  $x$  führen!

beachte:

Aus ③ folgt sofort, dass  $\int_{-\infty}^{\infty} dx P(x) = 1$

denn  $\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y-a) = 1$

Zur Anwendung benutzen wir:

$$\delta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iky}$$

Einsetzen in ④ (mit  $y = x - \sum_{i=1}^N s_i$ )

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 w_1(s_1) \dots \int_{-\infty}^{\infty} ds_N w_N(s_N)$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} e^{ik(s_1 + s_2 + \dots + s_N)}$$

mal

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} ds_j w_j(s_j) e^{iks_j}$$

Produkt

führe ein:  $w_j(k) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_j w_j(s_j) e^{iks_j}$

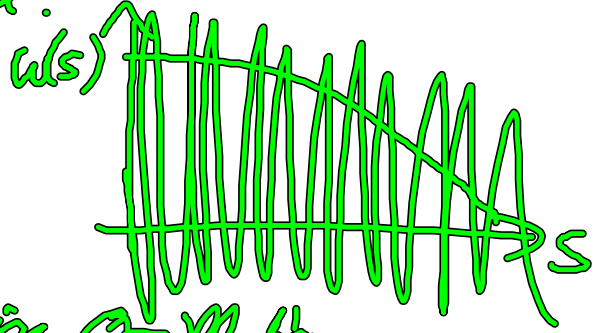
$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \prod_{j=1}^N w_j(k)$$

bedeutet  
 $w_j(k) = \langle e^{iks_j} \rangle$   
 charakterist.  
 Funktionen!

Wir entwickeln nun die Funktion  
 $w_j(k)$  für kleine  $k$

Begründung:

große  $k$ :  $e^{iks}$  entspricht sehr kurzwelligen  
Oszillationen  $\rightarrow$  geringer Beitrag  
zum Integral:



kleine  $k$ : langwellige Oszillationen  
 $\Rightarrow$  Form von  $w(s)$  wird wichtig

$$\begin{aligned} w_j(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} ds_j w_j(s_j) e^{iks_j} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds_j w_j(s_j) \left( 1 + iks_j - \frac{1}{2} k^2 s_j^2 + \dots \right) \\ &= 1 + ik \langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle + \dots \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} \ln \prod_{j=1}^N w_j(k) &= \sum_{j=1}^N \ln w_j(k) \\ &= \sum_{j=1}^N \ln \left( 1 + ik \langle s_j \rangle - \frac{1}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle \dots \right) \end{aligned}$$

benutze nun noch

$$\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2} + \dots$$

$$\text{wobei } y = ik \langle s_j \rangle - \frac{\Delta}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle$$

(bei Vernachlässigung der Terme  $O(y^3)$ )

$$\ln \prod_{j=1}^N w_j(k) = \sum_{j=1}^N \ln w_j(k)$$

$$\approx \sum_{j=1}^N \underbrace{\left( ik \langle s_j \rangle - \frac{\Delta}{2} k^2 \langle s_j^2 \rangle \right)}_{\text{aus } y} - \underbrace{\frac{\Delta}{2} (ik \langle s_j \rangle)^2}_{\text{aus } -\frac{y^2}{2}} + O(k^4)$$

benutze Zusammenhänge zw.

$$\langle s_j^n \rangle \text{ und } \langle x^n \rangle$$

$$\Rightarrow \ln \prod_{j=1}^N w_j(k) = ik \langle x \rangle - \frac{\Delta}{2} k^2 \langle (\Delta x)^2 \rangle$$

$$\left( \text{wg.} \right) \langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_{j=1}^N \langle s_j^2 \rangle \langle s_j^2 \rangle$$

Löse auf:

$$\prod_{j=1}^N w_j(k) \approx e$$

$$ik\langle x \rangle - \frac{k^2}{2} \langle (\Delta x)^2 \rangle$$

für kleine  $k$

Einsetzen in den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \prod_{j=1}^N w_j(k)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} e^{ik\langle x \rangle - \frac{k^2}{2} \langle (\Delta x)^2 \rangle}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x - \langle x \rangle) - \frac{k^2}{2} \langle (\Delta x)^2 \rangle}$$

benutze -  $\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ay^2 + by}$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x} e^{-\frac{1}{2(\Delta x)^2} (x - \langle x \rangle)^2}$$

Gaußverteilung!

Beachte:

Dies gilt, obwohl wir keine speziellen Annahmen über die Einzelverteilung  $w_j(s_j)$  gemacht haben!

nur wichtig, dass die Momente existieren und die Einzelverteilungen  $s_j$  statistisch unabhängig sind!