

Wk:

Großkanonische Zustandssumme

$$Z_{\text{GK}}^{\text{Fermi}} = \prod_{\alpha} (1 + e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)})$$

$$Z_{\text{GK}}^{\text{Boson}} = \prod_{\alpha} (1 - e^{-\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)})^{-1} \quad n_{\alpha} = 0, 1$$

VII.4. Statistiken, thermodynamische Größe

betrachte die mittlere Besetzungszahl des Zustands mit Energie ϵ_{α}

$$\langle n_{\alpha} \rangle = \frac{1}{Z_{\text{GK}}} \prod_{\alpha'} \sum_{n_{\alpha'}} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha'} - \mu)n_{\alpha'}} n_{\alpha}$$

$$Z_{\text{GK}} = \prod_{\alpha'} \sum_{n_{\alpha'}} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha'} - \mu)n_{\alpha'}}$$

Nur der Term $n_k = \alpha$ trägt bei, Rest kürzt sich heraus!

$$\langle n_k \rangle = \frac{\sum_{n_k} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)n_k} n_k}{\sum_{n_k} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)n_k}}$$

$$\langle n_k^{\text{Fermi}} \rangle = \frac{e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)}}$$

$$= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$$

$$= \langle n_k \rangle^{\text{FD}}$$

Fermi-Dirac
Statistik

Bosonen: $n_k = 0, 1, 2, \dots, \infty$

$$\langle n_k^{\text{Boson}} \rangle = \frac{\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)n_k} n_k}{\sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_k - \mu)n_k}}$$

$$\langle n_k^{\text{Boson}} \rangle = - \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \left(\sum_{n_k=0}^{\infty} (e^{-\gamma})^{n_k} \right)$$

mit $\gamma = \beta(\epsilon_k - \mu)$

entspricht Konvergenz geometrischer Reihe
falls $e^{-\gamma} < 1 \Leftrightarrow \mu < \epsilon_k \forall k$

$$\langle n_k^{\text{Boson}} \rangle = - \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \left(\frac{1}{1 - e^{-\gamma}} \right)$$

$$\begin{aligned} \langle n_k^{\text{Boson}} \rangle &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln(1 - e^{-\gamma}) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\gamma}} (-e^{-\gamma})(-1) \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{1 - e^{-\gamma}} = \frac{1}{e^{\gamma} - 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle n_k^{\text{Boson}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} = \langle n_k^{\text{BE}} \rangle$$

Bose-Einstein
Statistik

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1}$$

"+" Fermionen

"-" Bosonen

Folgerungen

• mittlere Gesamtteilchenzahl

$$\langle N \rangle = \sum_{\alpha} \langle n_{\alpha} \rangle$$

• mittlere Energie

$$\langle E \rangle = \sum_{\alpha} \langle n_{\alpha} \rangle \epsilon_{\alpha}$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{\epsilon_{\alpha}}{e^{(\epsilon_{\alpha} - \mu) / kT} \pm 1}$$

VII.5 Zustände in klassischer Grenzfall

behandelt Teilchen im Kasten, nicht unterschiedlich,
nicht-relativistische

Einstuldenenergien.

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{p^2}{2m}$$

mit $p = \hbar k$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$= \hbar \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z) \text{ diskret!}$$

ganze Zahlen

Seitenlänge des Kastens

$$L = \langle 3 \rangle$$

$$\langle n_d \rangle \Rightarrow \langle n_f \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)} \pm 1}$$

$$= \frac{e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)}}$$

$$\text{Sei } x = e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)} = e^{\beta\mu} e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}$$

$$\Rightarrow \langle n_f \rangle = \frac{x}{1 \pm x}$$

Der klassische Grenzfall entspricht der Annahme, dass

$$e^{\beta\mu} \ll 1$$

Fugazität

$$x = \frac{h^3}{2\pi m k_B T} e^{\beta\mu}$$

Begründung

freimische
Wellenlänge

klassischen Fall: mit kleiner Teilchenabstand $\gg \lambda$

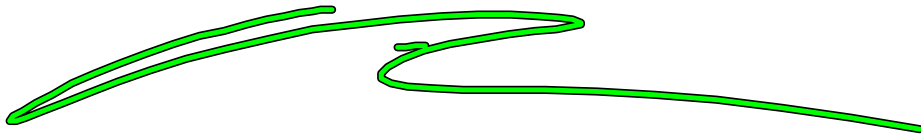
$$g^{-1/3} \gg \lambda$$

$$\Leftrightarrow g \lambda^3 \ll 1$$

Für kleine Dichte gilt:

$$g \lambda^3 \approx e^{1/\mu}$$

$$\checkmark e^{1/\mu} \ll 1$$



Result:

$$e^{\beta \mu} \ll 1$$

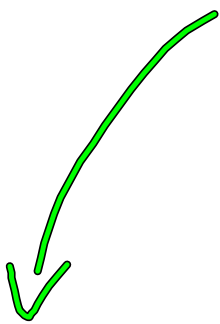
$$\Rightarrow x = e^{\beta \mu} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \ll 1$$

→ Taylorentwicklung von $\langle n_p \rangle = \frac{x}{1 \pm x}$
um $x=0$

$$\frac{x}{1 \pm x} \approx x$$

Im klassischen Grenzfall gilt also:

$$\langle n_p \rangle \approx e^{-\beta \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)}$$



gilt sowohl für Fermionen
als auch "Bosonen!"

Folgerung:

$$\langle N \rangle = \sum_p \langle n_p \rangle$$

$$\rightarrow \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{-\frac{p^2}{2m}\beta\mu} e^{-\beta\mu}$$
$$= \frac{V}{\lambda^3} e^{-\beta\mu}$$

diskrete Mittelung
wird kontinuierlich.

$$\Rightarrow \frac{\langle N \rangle}{V} \lambda^3 = e^{-\beta\mu}$$

$$\Leftrightarrow \rho \lambda^3 = e^{-\beta\mu}$$

entspricht exakt dem
Ergebnis für klassisches,
ideales Gas!

VII. 6. Fermionen bei tiefen Temperaturen

betrachte nicht-wechselwirkende,
nichtrelativistische Fermionen mit $\epsilon_q = \epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$

Die FD-Statistik kann auch als Fermionen
der ^{Einklein-} Energie aufgefasst werden!

$$\langle n(\epsilon) \rangle^{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad \text{mit } \epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

VII. 6.1. Der Grundzustand

$$T \rightarrow 0 \Leftrightarrow \beta \rightarrow \infty$$

es gilt:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{\beta(\epsilon - \mu)} = \begin{cases} \infty, & \epsilon > \mu(T=0) \\ 0, & \epsilon < \mu(T=0) \end{cases}$$

beachte: μ ist
eine Funktion der
Temperatur!

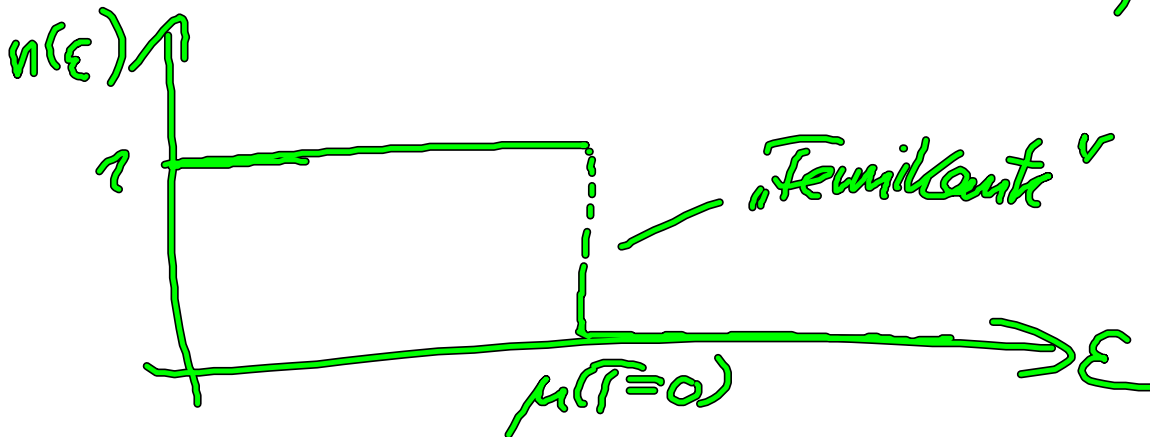
Folgerung:

$$\langle n(\epsilon) \rangle_{T \rightarrow 0}^{\text{FD}} = n(\epsilon)|_{T=0}$$

mittelwert Wanne analys,
da thermische Fluktuation
verschwinden!

Illustration

$$= \begin{cases} 1 & , \epsilon < \mu(T=0) \\ 0 & , \epsilon > \mu(T=0) \end{cases}$$



Interpretation

Bei $T=0$ ("entartetes Fermigas")

sind alle Quantenzustände mit

$E < \mu(T=0)$ mit je einem Fermion besetzt, alle anderen sind unbesetzt

Folgerung des Pauliprinzip!

Man nennt die Grenzenergie $\mu(T=0)$ die Fermienergie

$$E_F := \mu(T=0)$$

Zugehörige Impuls:

$$p_F = \sqrt{2mE_F} \quad \text{Fermi-Impuls}$$

$$\left(\Rightarrow E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right)$$

Gesamt-Teilchenzahl bei $T=0$ (da $n(E)$ Stufenfunktion!)

$$N = (\text{StM}) \sum_{p \text{ mit } |p| < p_F} 1$$

Vorfaktor berücksichtigt, dass für Teilchen mit Spin jeder Impulszustand $2s+1$ facher ist

z.B. Elektron $s = \frac{1}{2}$

$$(2s+1) = 2$$

$$N = (2s+1) \sum_{\substack{p \text{ mit } p < p_F}} 1$$

$$= (2s+1) \left(\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\right) \int_{p < p_F} dp$$

Begründung für Wechsel zum Integral:
 $V \rightarrow \infty$
 $L \rightarrow \infty$
 Abstände zwisch. Energiepunkten werden klein

$$\Rightarrow N = (2s+1) \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp$$

$$= (2s+1) \frac{V}{6\pi^2} \left(\frac{p_F}{\hbar}\right)^3$$

$$\rightarrow p_F = \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \right)^{\frac{1}{3}} \hbar g^{\frac{1}{3}} \quad \text{mit } g = \frac{2m}{\hbar^2}$$

Damit folgt auch:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \left(\frac{6\pi^2}{2s+1} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} g^{\frac{2}{3}}$$

\rightarrow Grundzustandsenergie des
Gesamtsystems

$$E = \sqrt{(2s+1)} \sum_{p \text{ (} p < p_F \text{)}} E(p)$$

$$= (2s+1) \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p < p_F} dp \frac{p^2}{2m}$$

$$= \dots = (2s+1) \frac{V}{20\pi^2 \hbar^3 m} p_F^5$$

Benutze nur noch die Definition

Von ϵ_F und N als Funktion von β

$$\rightarrow E \Big|_{T=0} = \frac{3}{5} \epsilon_F N$$

endlich große
Grundzustands-
energie!!

Vergleiche mit Resultat für das klassische
ideale Gas:

$$E^{\text{klass}} = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$\Rightarrow E^{\text{klass}} = 0 \text{ bei } T=0!$$

Entsprechend Druck:

$$P^{\text{Fermi}} \Big|_{T=0} = \frac{2}{5} \epsilon_F \rho$$
$$\neq 0$$

(vgl. klass. Fall: $pV = N k_B T$
 $\Rightarrow p^{\text{klass}} = 0$ für $T=0$)

Anwendungen

1) Leitungselektronen (in Metalle)

Vorteilung:

Ionenrümpfe sind fest an Gitterplätze gebunden, Valenzelektronen sind frei;

Coulomb-Anziehung zw. den
E⁻ Elektronen wird vernachlässigt!

In solchen Systemen hat ϵ_F die Größenordnung von einigen eV

$$\Rightarrow T_F := \frac{\epsilon_F}{k_B} \quad \begin{array}{l} \text{Fermi-Temperatur} \\ \text{("Entartungs-} \\ \text{Temperatur")} \end{array}$$

() ist von Größenordnung 10^4 K \leftarrow Kelvin

Folgerung:

bei Zimmertemperatur ($\approx 300 \text{ K}$)
entspricht $n(\epsilon)$ im durchsichtigen System
im Wesentlichen einer Stefan-Boltzmann!

2) Weißer Zwerg

\Rightarrow Endstadium eines Sterns
mit einer Masse bis zum
~~10~~ fachen der Sonnenmasse
&

Weißer Zwerg besteht aus ionisierten Kernen
(Helium)
und Elektronen

Dichte in diesem Stern ist riesig!!
 $E_F \approx 10^5 \text{ eV}$ ($T_F \approx 10^4 \text{ K}$)

Nullpunkt durch $\rho_{T=0}$ ist ebenfalls
wichtig!

→ wichtig für die Stabilität des Systems
(gegen die Gravitation)