Theoretische Optik

VL: Do, Fr. $10^{15} - 12^{00}$ EW 203

Übung: Mo $16^{15} - 17^{45}$ EW 203

(16.5. noch nicht festgelegt)

Sprechstunde: Di 13-14 EW 742 (Knorr)

ÜA: Do Ausgabe

Abgabe in Übung

I Einführung in VL

1. Historischer Abriss

- Demokrit (400 v.u.Z.) Lichtstrahlen sind Teilchen auf Bahnen im leeren Raum
- Aristoteles (350 v.u.Z.) leerer Raum ist nicht vorstellbar
  Licht als Eigenschaft v. Körpern
  Farbe als zentraler Begriff (Goethe)

- ab 17 Jh. dramatische Entwicklung

- Z. Janssen (1600) Mikroskop

- G. Galilei (1609) Teleskop

- W. Snell (1621) Brechungsgesetz

- R. Hooke (1665) Wellentheorie

- I. Newton (1704) Korpuskulartheorie (Polarisation, Beugung)

- O. Roemer (1676) Messg. Lichtgeschwindigkeit

- F.W. Herschel (1800) Infrarot

- J.W. Ritter (1801) UV

- T. Young (1801/1817) Interferometrie, transversale Welle

- C.F. Gauss (1820) Geometrische Optik

- G.R. Kirchhoff (1883) Beugung

- E. Abbe (1900) Auflösungsvermögen

- J.C. Maxwell (1862) Maxwellgleichungen

- H. Hertz (1888) em. Welle

- M. Planck (1900) Strahlungsgesetze

- A. Einstein (1905) Quantenhypothese Licht
  Photoeffekt

- W. Heisenberg (1920 >) Quantisierung Wellenfelder
  u.a.

- T.H. Maiman (1960) Laser

- Townes / Prochorow / Basov Nobelpreis (1964)

- J. Kimble (1977) nichtklass. Licht
  u.a. (Einzelphotoneneffekte)

- heutige Forschg. in Quantenoptik
  (Verschränkung, gequetschte Zustände u.a.)

2. Optische Felder (im Vakuum)

zwei Zugänge: Feldfunktion $\vec{E}(\vec{r},t)$

Modenentwicklg. $= \sum_\lambda \vec{u}_\lambda(\vec{r})\, c_\lambda(t)$

a) Feldgleichungen

Maxwellgleichungen
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{E}(\vec{r},t)$$

Wellengleichung im Vakuum

z.B. 1d $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0$

$$\underbrace{\vec{E} = f(z-ct) + g(z+ct)}$$

Funktion g, f sind d. AB, RB festzulegen

b) Modenentwicklung

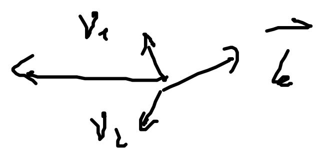
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \vec{u}_\lambda(\vec{r})\, c_\lambda(t) + c.c.$$

Feld entwickelt

$\{\vec{u}_\lambda(\vec{r})\}$ vollständiges Funktionssystem

zeitabhängige Koeffizienten

z.B. ebene Welle



$\lambda: \vec{k}, \nu_{i=1,2}(\vec{k})$

$$\vec{u}_\lambda = \vec{e}_{\nu_{1/2}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\sum_\lambda \mathrel{\hat{=}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\nu(\vec{k})=1}^{2}$$

Bestimmung d. Moden:

$$\Box \vec{E}(\vec{r},t) = 0 \,,$$ Entwicklung einsetzen

$$\sum_\lambda \Big(\underbrace{\Delta \vec{u}_\lambda(\vec{r})}_{-\ell_\lambda^2 \vec{u}_\lambda(\vec{r})} c_\lambda(t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 c_\lambda(t)\, \vec{u}_\lambda(\vec{r}) \Big) = 0$$

als Eigenwert d. Δ Operators bestimmen

$$\ell_\lambda, \vec{u}_\lambda \longrightarrow \ell_\lambda^2 c_\lambda(t) = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 c_\lambda(t)$$

$$c_\lambda(t) = c_\lambda(0)\, e^{\pm i c \ell_\lambda t}$$

$$c\, k_\lambda = \omega_\lambda$$

→ Modenentwicklg. ist mögl. wenn $\Delta u_\lambda = -k_\lambda^2 u_\lambda$ lösen

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \vec{u}_\lambda(\vec{r})\, c_\lambda(0)\, e^{i\omega_\lambda t} + cc.$$

c) Quant- und klass. Felder

(i) Übergg. zu Quantentheorie $c \to \underline{c}$

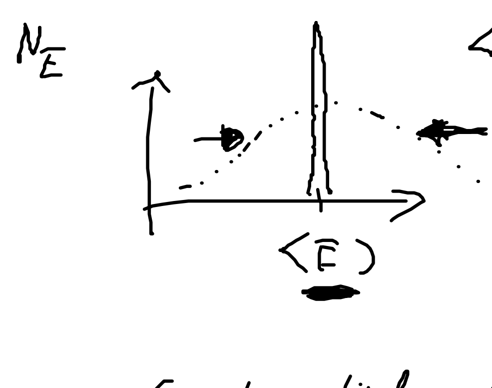
$$[\underline{c}_\lambda, \underline{c}^\dagger_{\lambda'}] = \delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{f. Moden}$$

$$[\underline{A}_i(\vec{r}), -\varepsilon_0 \underline{E}_j(\vec{r}\,')] = \delta^T_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

(ii) Unterscheidg. klass. u. qm. Felder:

geringe Schwankung d. Photonzahl / Intensität

bedeutet: $\dfrac{\langle \Delta E\rangle^2}{\langle \vec{E}\rangle^2} \to 0$ → klassisches Feld



- Gleichgewichtszustände, kohärente Zustände erfüllen dies Kriterium f. klass. Beschreibg.

→ dann ausreichend $\langle \vec{E}\rangle$ zu beschreiben

$\hat{=}$ klass. Maxwellgleichg.

3/ Inhalte d. VL

Do klass. Aspekte
A. Knorr

- Lichtstrahlen
- linear Optik, nichtlinear Optik
- Lichtausbreitg. (Solitonen)

Fr. qm. Aspekte
H. Appel

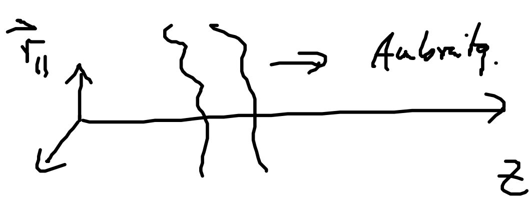
- Feldquantisierg.
- Resonator und Quantenoptik
- Zustände, WW und Materie

Aspekte: Nanooptik, extrem nichtlineare Optik, Spektroskopie, Feynmandiagramme

II Strahlen und Lichtpulse in paraxialer Optik

1. Paraxiale Wellengleichung im Vakuum

Strahlen
3d Objekte
$(\vec{r}, t)$

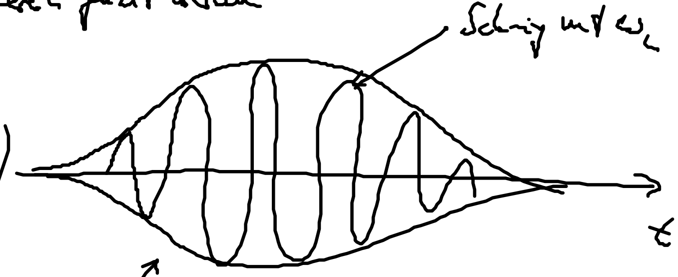


$\vec{k}_L = k_L \vec{e}_z$ dominante Ausbreitg.

Ziel: Abweichg. angeben

$\Box \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ soll vereinfacht werden

$$E_i = \underbrace{\tilde{E}_i(\vec{r}_\parallel, z, t)}_{} e^{i(k_L z - \omega_L t)}$$



1 Komponente (x, y)

gesucht f. paraxiale Näherung

analog auch in z-Koordinate

einsetzen in $\Box \tilde{E} = 0$

brauche ∂_z^2, ∂_t^2 um einzusetzen

geeignet wählen

$$\partial_z^2 E = \left(\cancel{\partial_z^2 \tilde{E}} + 2ik_L \partial_z \tilde{E} - k_L^2 \tilde{E}\right) e^{i(k_L z - \omega_L t)}$$

$\ll$

$$\partial_t^2 E = \left(\cancel{\partial_t^2 \tilde{E}} - 2i\omega_L \partial_t \tilde{E} - \omega_L^2 \tilde{E}\right) e^{i(k_L z - \omega_L t)}$$

k_L, ω_L Trägerwellenzahl / frequenz

einsetzen und k_L so wählen daß $\omega_L = c k_L$, i- weglassen

$$\left(\partial_z^2 + \Delta_\parallel - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) E = \Big(2ik_L \partial_z \tilde{E} + \Delta_\parallel \tilde{E} + 2i\omega_L \partial_t \tilde{E} + \underbrace{\left(-k_L^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2}\right)}_{=0} \tilde{E}\Big) e^{i\cdots}$$

$$\Big(\underbrace{\partial_z + \frac{1}{c}\partial_t}_{} + \underbrace{\frac{1}{2ik_L}}_{}\Delta_\parallel\Big) \tilde{E}(z, \vec{r}_\parallel, t) = 0$$

1. Ableitungen, einfach zu behandeln

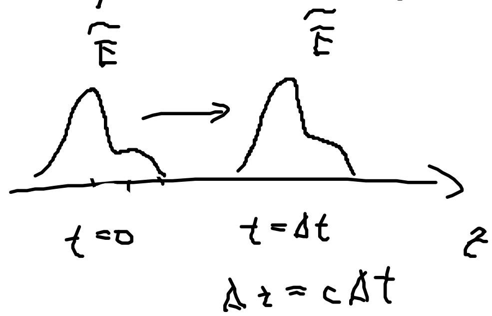
Beugung $\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2$

$$\underbrace{\text{Ausbreitg. d. 1. Ordng. partielle Dgl. beschreiben}}$$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{c}\,\partial_t\right)\tilde{E} = 0$$ beschreibt Ausbreitg. in positive z-Richtg.

$$\tilde{E} = f\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

$$= \tilde{f}\,(z - ct)$$



ist einfach Verschiebg. in Zeit bzw Ort

Einführg. eines retardierten Zeit $$y = t - \frac{z}{c}$$

$$\xi = z$$

$$(t, z) \rightarrow (y, \xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} = \partial_y$$

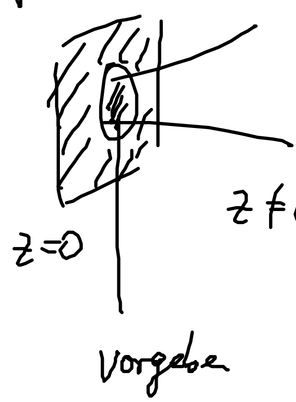
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{1}{c}\,\partial_y + \partial_\xi$$

$$\boxed{\left(\partial_\xi + \frac{1}{2ik_L}\Delta_\perp\right)\tilde{E}(\xi, \vec{r}_\perp, \eta) = 0}$$

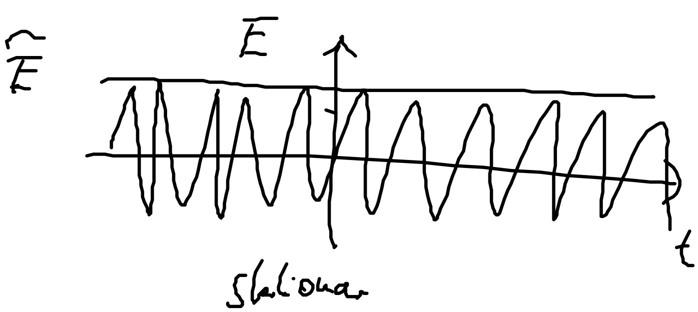
paraxiale Wellengleichung f. Lichtpulse $\tilde{E}$ in mitbewegten Koordinaten

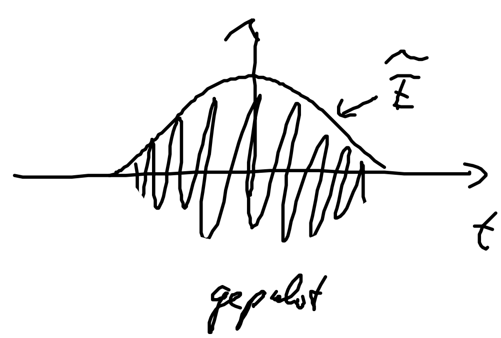
<u>Bemerkungen</u>:

a) partielle Dgl. in zweiter Ordnung, analog Schrödingergleichung. beschreibt räumliche Ausbreitung f. ein bei $\xi = z = 0$ vorgegebene Verteilung v. Licht



b) enthält jetzt gepulste und stationäre Wellen in derselben Formulierung.





<u>2. Lösung der paraxialen Wellengleichung</u>

Lösg erfolgt analog zu Schrödingergleichung im Fourierraum

- fund mode: Gauß Strahl (ÜA)

$$\tilde{E}_G = E_0(y) \, \frac{\exp\left(-\frac{r_\parallel^2}{w_0^2\,(1+2i\xi/k_L w_0^2)}\right)}{(1+2i\xi/k_L w_0^2)}$$

wenn man bei $\tilde{E}_G(z=0)$ die Verteilg.

$$E_0(y)\, e^{-r_\parallel^2/w_0^2} \quad \text{vorgibt}$$

$$w_0 \text{ – Breite bei } \xi = z = 0$$

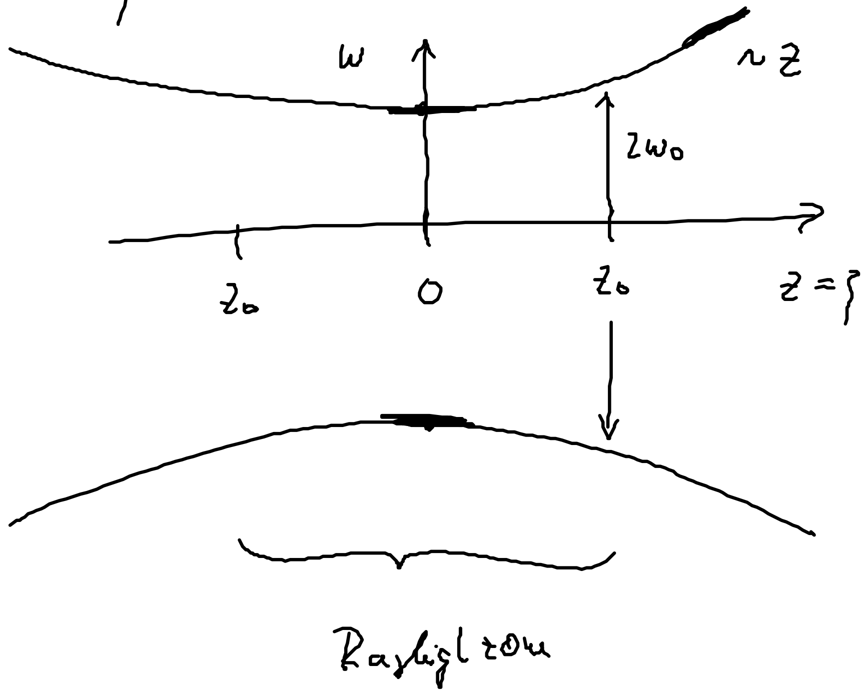
<u>Bemerkgn</u>:

a) Lösg. heißt Gauß mode

2 charakterist. Längen: Breite w_0 bei $z=0$

Rayleighlänge $z_0 = \frac{k_L w_0^2}{2}$

b) Intensität $|\tilde{E}|^2$ auftragen f. typische Breite $w = w_0 \left(1+ \frac{z^2}{z_0^2}\right)^{1/2}$



c) Wellenfronten:

bei $z = 0$ ebene Welle

$z \to \infty$ Kugelwelle

d) Gaußstrahl ist keine exakte Lösung

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$, $i = x$

$\partial_z E_z = -\partial_x \tilde{E}_x$

abschätzen

Gaußstrahl einsetzen

$\sim k_L E_z = -i \frac{2x}{w_0^2(\ )k_L} \tilde{E}_x \longrightarrow \frac{1}{w_0 k_L}$ klein wirklich soll klein sein!

$$\hat{=} \frac{\lambda}{\omega_0} \to 0$$

$\boxed{\lambda \ll \omega_0}$ ist zu fordern