III Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Freie Maxwell Gleichungen ohne Quellen

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Faraday} \qquad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{Ampère} \qquad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad (3.4)$$

Gauss

Im Vakuum

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Maxwell-Gleichungen (3.1)-(3.4) sind automatisch erfüllt, falls E, B - Feld durch Vektor und skalares Potential gegeben sind (die jeweils entsprechende Wellengleichungen erfüllen müssen)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V$$

Maxwell-Gleichungen sind eichinvariant

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla \chi \qquad \chi = \chi(\vec{r}, t)$$
$$V \to V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Für nicht-relativistische Systeme ist die Wahl der Coulomb Eichung nützlich

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$
$$V = 0$$

↝ (3.4) ist automatisch erfüllt

$$\nabla \cdot E = -\frac{\partial}{\partial t} \cancel{\nabla \vec{A}}^{\,0} - \nabla \cancel{(\nabla V)}^{\,0} = 0$$

Sowohl $\vec{E}$ als auch $\vec{B}$ sind durch $\vec{A}$ gegeben

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$
$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

Einsetzen in Faraday und Ampere Gleichung

Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$-\nabla \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times A \quad \checkmark$$

Erinnerung: Vektor Identität

$$a \times b \times c = b(a \cdot c) - (a \cdot b)c$$

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - (\nabla \cdot \nabla)A \qquad (*)$$

Ampere: $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \quad / \cdot \mu_0$

$$\nabla \times \mu_0 H = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A$$

$(*)$

$$\nabla(\underbrace{\cancel{\nabla A}}_{\to 0}) - \nabla^2 A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A$$

in coulomb Eichung

Wellengleichung für Vektorpotential

$$\nabla^2 A = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

Lösung durch Separationsansatz / Modenentwicklung

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_m \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m \varepsilon_0}}\left[a_m(t)\,\vec{u}_m(\vec{r}) + a_m^+(t)\,\vec{u}_m^*(\vec{r})\right]$$

$$a_m, a_m^+ \in \mathbb{C}$$

Einsetzen in Wellengleichung liefert

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u}_m(\vec{r}) + \frac{\omega_m^2}{c^2}\vec{u}_m(\vec{r}) = 0 \qquad \text{Helmholtz-Gleichung}$$

$$\frac{\partial^2 a_m(t)}{\partial t^2} + \omega_m^2 a_m = 0$$

Lösung für zeitabhängige Koeffizienten

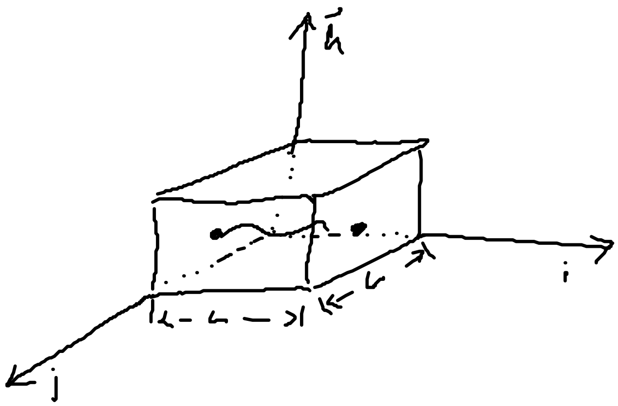
$$a_m(t) = a_m e^{-i\omega_m t}$$

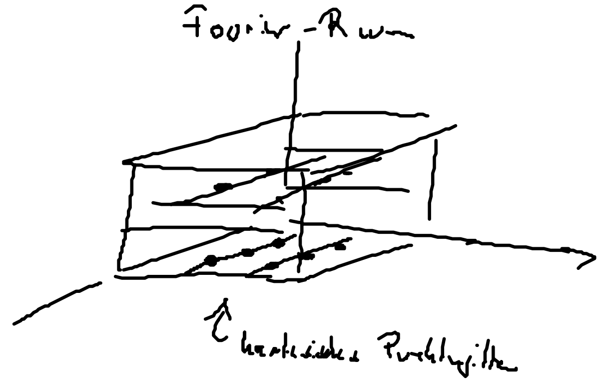
$$a_m^+(t) = a_m^+ e^{+i\omega_m t} \qquad a_m, a_m^+ \in \mathbb{C}$$

Lösung der Helmholtz-Gleichung für Quader mit Volumen V

und periodischen Randbedingungen

$$A(\vec r + L\vec i) = A(\vec r + L\vec j) = A(\vec r + L\vec k) = A(\vec r)$$





$$\vec u_m(\vec r) = \frac{1}{\sqrt{V}}\, \vec e_m \cdot e^{+i k_m \cdot \vec r}$$

$$k_m = \frac{2\pi}{L}(m_1 \vec i + m_2 \vec j + m_3 \cdot \vec k) \qquad m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$$

Orthogonalität

$$\int_V u_m^*(\vec r) \cdot u_n(\vec r)\, d^3r = \delta_{n,m}$$

Aus Coulomb-Eichung folgt als Bedingung

$\nabla \cdot A = 0 \rightarrow \vec e_m \cdot \vec k_m = 0$ Transversalität von Moden

↳ erlaubt zwei orthogonale Polarisationen in der Ebene senkrecht zu $\vec k_m$

Explizite Form der Lösung der Wellengleichung

Vektor Potential

$$\vec A(\vec r, t) = \sum_m \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m \varepsilon_0 V}}\, \vec e_m \left[a_m e^{i(\vec k_m \vec r - \omega_m t)} + a_m^+ e^{-i(\vec k_m \cdot \vec r - \omega_m t)} \right]$$

E-Feld

$$\vec E(\vec r t) = -\frac{\partial}{\partial t} A(\vec r t)$$

$$= i \sum_m \sqrt{\frac{\hbar \omega_m}{2\varepsilon_0 V}}\, \vec e_m \left[a_m e^{i(\vec k_m \vec r - \omega_m t)} - a_m^+ e^{-i(\vec k_m \cdot \vec r - \omega_m t)} \right]$$

B-Feld

$$\vec B(\vec r t) = \nabla \times \vec A(\vec r t)$$

$$= -\frac{i}{c}\sum_m \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2\varepsilon_0 V}}\;\vec e_m \times \vec k_m \left[a_m e^{i(\vec k_m \vec r - \omega_m t)} - a_m^+ e^{-i(\vec k_m \vec r - \omega_m t)}\right]$$

Energie des Multimodenfeldes (klassisch)

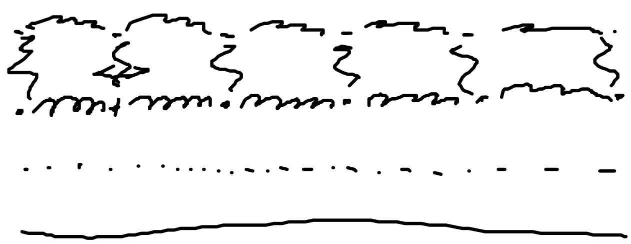
$$H = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \, d^3r$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times A)^2 \, d^3r$$

Einsetzen der Lösung + Orthogonalität der Moden

$$= \frac{1}{2}\sum_m \hbar\omega_m \left(a_m a_m^+ + a_m^+ a_m\right)$$

↳ nach wie vor komplexe Zahlen



Quantisierung des Multimodenfeldes

$$[\underline{a}_m, \underline{a}_n] = 0$$

$$[\underline{a}_m^+, \underline{a}_n^+] = 0$$

$$[a_m, \underline{a}_m^+] = 1$$

Erinnerung: QM harmonischer Oszillator

$$H_n = \frac{p_n^2}{2} + \frac{1}{2}\omega_n^2 q_n^2 \qquad [q_n, p_n] = i\hbar$$

Erzeuger / Vernichter

$$\underline{a}_n = (2\hbar\omega_n)^{-1/2}(\omega_n \underline{q}_n + i\underline{p}_n) \; ; \quad \underline{q}_n = (\hbar/2\omega_n)^{1/2}(\underline{a}_n + \underline{a}_n^+)$$

$$\underline{a}_n^+ = (2\hbar\omega_n)^{-1/2}(\omega_n \underline{q}_n - i\underline{p}_n) \; ; \quad \underline{p}_n = i(\hbar/2\omega_n)^{1/2}(\underline{a}_n - \underline{a}_n^+)$$

$$\underline{a}_n \underline{a}_n^+ = (\hbar\omega)^{-1}\left(\underline{H}_n + \frac{1}{2}\hbar\omega_n\right) \qquad (1)$$

$$\underline{a}_n^+ \underline{a}_n = (\hbar\omega)^{-1}\left(H_n - \frac{1}{2}\hbar\omega_n\right) \qquad (2)$$

(1) - (2)

$$\underline{a}_n \underline{a}_n^+ - \underline{a}_n^+ \underline{a}_n = [\underline{a}_n, \underline{a}_n^+] = 1$$

(1) + (2)

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_n (\underline{a}_n \underline{a}_n^+ + \underline{a}_n^+ \underline{a}_n) = \hbar\omega_n (\underline{a}_n^+ \underline{a}_n + 1/2) = \underline{H}_n$$

Hamiltonian des Multimodenfeldes

$$H = \frac{1}{2}\sum_m \hbar\omega_m (a_m a_m^+ + a_m^+ a_m)$$

$\downarrow$ Quantisierung $\quad a_m \to \underline{a}_m$, $\quad a_m^+ \to \underline{a}_m^+$

$$\underline{H} = \frac{1}{2}\sum_m \hbar\omega_m (\underline{a}_m \underline{a}_m^+ + \underline{a}_m^+ \underline{a}_m)$$

$$= \sum_m \hbar\omega_m (\underline{a}_m^+ \underline{a}_m + 1/2)$$

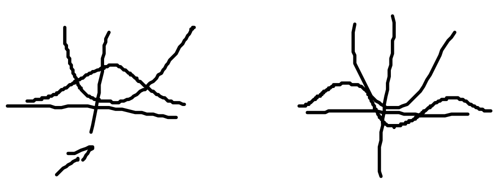
$\Rightarrow$ freie EM-Feld entspricht in quantisierter Form einer Summe von freien QM Oszillatoren!

3.2 Fock-Zustände

Einzelne Mode

$\underline{a}^+\underline{a}|n\rangle = n|n\rangle \quad \to \quad n$ Photonen in Zustand $|n\rangle$

"Number state" $\equiv$ Energie-Eigenzustände des Oszillators



$E_n = \hbar\omega \cdot \frac{1}{2}$

$$\underline{H}|n\rangle = \hbar\omega(\underline{a}^+\underline{a} + \tfrac{1}{2})|n\rangle$$

$$= \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})|n\rangle \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$= E_n|n\rangle$$

$$\underline{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\underline{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

Multi-Moden Feld

$$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes \ldots \otimes |n_M\rangle = |n_1 n_2 n_3 \ldots n_M\rangle \quad M \text{ Oszillatoren}$$

Grundzustand

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \ldots \otimes |0\rangle = |0,0,0,\ldots 0\rangle = |0\rangle$$

Energie-Erwartungswert des Grundzustandes

$$\langle 0|\underline{H}|0\rangle = \langle 0|\sum_{m=1}^{M} \hbar\omega_m \left(\underline{a}_m^+ \underline{a}_m + \tfrac{1}{2}\right)|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} \hbar\omega_m$$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} \hbar\omega_m \to \infty$$

Vakuum-Energie divergiert

In der Praxis kann nur die Energiedifferenzen betrachtet werden

Multimoden-Wellenfunktion im Ortsraum

$$\langle x_1 x_2 \ldots x_M|n_1 n_2 \ldots n_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{M!}}\frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{M} n_j!}} \begin{vmatrix} \phi_{n_1}(x_1) & \phi_{n_1}(x_2) & \ldots & \phi_{n_1}(x_M) \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{n_M}(x_1) & \phi_{n_M}(x_2) & \ldots & \phi_{n_M}(x_M) \end{vmatrix}_+$$

$$\phi_n(x) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)\frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\,x\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}x^2}$$

Hermite Polynome

3.3 kohärente Zustände / Glauber Zustände

kohärente / Glauber Zustände sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators

$$\underline{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \qquad , \quad \langle\alpha|\,a^+ = \langle\alpha|\,\alpha^* \qquad \alpha\in\mathbb{C}$$

kohärente Zustand

Explizite Form

$$|\alpha\rangle \equiv e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

Überprüfung der Eigenwertgleichung

$$\underline{a}\,|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,\underline{a}|n\rangle$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$= \alpha\, e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\,|n-1\rangle$$

$$= \alpha\,|\alpha\rangle$$

Vakuum ist kohärenter Zustand mit $\alpha=0$

$$\underline{a}\,|\alpha{=}0\rangle = 0\cdot|\alpha{=}0\rangle = 0$$

Ortsdarstellung der kohärenten Zustände

$$\underline{a}\,|\alpha\rangle = (2\hbar\omega)^{-1/2}\,(\omega\underline{x}+i\underline{p})\,|\alpha\rangle$$

Projektion auf $\langle x|$

$$(2\hbar\omega)^{1/2}\,\alpha\,\langle x|\alpha\rangle = \langle x|\,\omega x + i\underline{p}\,|\alpha\rangle$$

$$= \left(\omega x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|\alpha\rangle$$

$$\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$$

Differentialgleichung

$$\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\,\psi_\alpha(x) = \left[\,(2\hbar\omega)^{1/2}\alpha - \omega x\,\right]\psi_\alpha(x)$$

Lösung

$$\psi_\alpha(x) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega}{2\hbar}x^2 + \left(\frac{2\omega}{\hbar}\right)^{1/2}\alpha x - \alpha^2}$$

kohärenter Zustand in Ortsdarstellung.