III Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Freie Maxwell Gleichungen ohne Quellen

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Faraday} \qquad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{Ampere} \qquad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad (3.4)$$

Gauss

Im Vakuum

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Maxwell-Gleichungen (3.1)-(3.4) sind automatisch erfüllt, falls E, B-Feld durch Vektor und skalares Potential gegeben sind (die jeweils entsprechende Wellengleichungen erfüllen müssen)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V$$

Maxwell-Gleichungen sind eichinvariant

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla \chi \qquad \chi = \chi(\vec{r}, t)$$
$$V \to V - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Für nicht-relativistische Systeme ist die Wahl der Coulomb Eichung nützlich

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$
$$V = 0$$

$\rightsquigarrow$ (3.4) ist automatisch erfüllt

$$\nabla \cdot E = -\frac{\partial}{\partial t} \cancelto{0}{\nabla \vec{A}} - \cancelto{0}{\nabla(\nabla V)} = 0$$

Sowohl $\vec{E}$ als auch $\vec{B}$ sind durch $\vec{A}$ gegeben

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$
$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$$

Einsetzen in Faraday und Ampere Gleichung

Faraday: $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$$-\nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times A \quad \checkmark$$

Erinnerung: Vektor Identität

$$a\times b\times c = b(a\cdot c) - (a\cdot b)c$$

$$\nabla\times\nabla\times A = \nabla(\nabla\cdot A) - (\nabla\cdot\nabla)A \qquad (*)$$

Ampere: $\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \quad |\cdot\mu_0$

$$\nabla\times\mu_0 H = \nabla\times\vec{B} = \nabla\times\nabla\times\vec{A} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A$$

$$\xleftarrow{(*)}$$

$$\nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\vec{A}}}_{=0}) - \nabla^2 A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A$$

in Coulomb Eichung

Wellengleichung für Vektorpotential

$$\nabla^2 A = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

Lösung durch Separationsansatz / Modenentwicklung

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_m\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m\varepsilon_0}}\left[a_m(t)\,\vec{u}_m(\vec{r}) + a_m^+(t)\,\vec{u}_m^*(\vec{r})\right]$$

$$a_m, a_m^+ \in \mathbb{C}$$

Einsetzen in Wellengleichung liefert

$$\vec{\nabla}^2\vec{u}_m(\vec{r}) + \frac{\omega_m^2}{c^2}\vec{u}_m(\vec{r}) = 0 \qquad \text{Helmholtz-Gleichung}$$

$$\frac{\partial^2 a_m(t)}{\partial t^2} + \omega_m^2 a_m = 0$$

Lösung für zeitabhängigen Koeffizienten

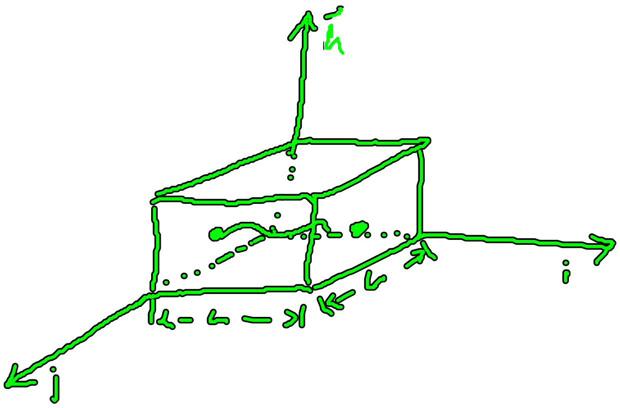
$$a_m(t) = a_m e^{-i\omega_m t}$$

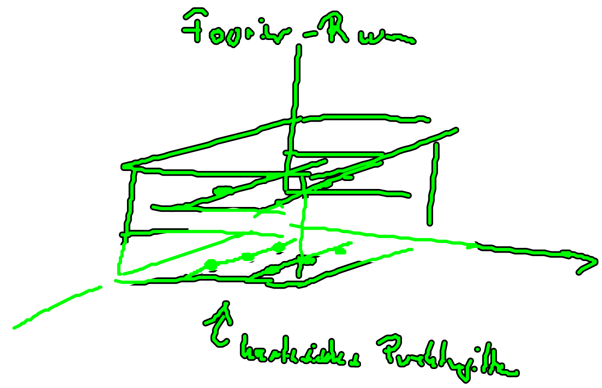
$$a_m^+(t) = a_m^+ e^{+i\omega_m t} \qquad a_m, a_m^+ \in \mathbb{C}$$

Lösung der Helmholtz-Gleichung für Quader mit Volumen V

und periodischen Randbedingungen

$$A(\vec r + L\vec i) = A(\vec r + L\vec j) = A(\vec r + L\vec k) = A(\vec r)$$





$$\vec u_m(\vec r) = \frac{1}{\sqrt{V}}\, \vec e_m \cdot e^{+i k_m \cdot \vec r}$$

$$k_m = \frac{2\pi}{L}(m_1 \vec i + m_2 \vec j + m_3 \cdot \vec k) \qquad m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$$

Orthogonalität

$$\int_V u_m^*(\vec r) \cdot u_n(\vec r)\, d^3r = \delta_{n,m}$$

Aus Coulomb-Eichung folgt als Bedingung

$\nabla \cdot A = 0 \rightarrow \vec e_m \cdot \vec k_m = 0$ Transversalität von Moden

↳ erlaubt zwei orthogonale Polarisationen in der Ebene senkrecht zu $\vec k_m$

Explizite Form der Lösung der Wellengleichung

Vektor Potential

$$\vec A(\vec r,t) = \sum_m \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m \varepsilon_0 V}}\, \vec e_m \left[a_m e^{i(k_m \vec r - \omega_m t)} + a_m^+ e^{-i(k_m \cdot \vec r - \omega_m t)} \right]$$

E-Feld

$$\vec E(\vec r,t) = -\frac{\partial}{\partial t} A(\vec r,t)$$

$$= i \sum_m \sqrt{\frac{\hbar \omega_m}{2\varepsilon_0 V}}\, \vec e_m \left[a_m e^{i(k_m \vec r - \omega_m t)} - a_m^+ e^{-i(k_m \cdot \vec r - \omega_m t)} \right]$$

B-Feld

$$\vec B(\vec r,t) = \nabla \times \vec A(\vec r,t)$$

$$= -\frac{i}{c}\sum_m \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2\varepsilon_0 V}}\,\vec e_m\times\vec k_m\left[a_m e^{i(\vec k_m\vec r-\omega_m t)} - a_m^+ e^{-i(\vec k_m \vec r-\omega_m t)}\right]$$

Energie des Multimodenfeldes (klassisch)

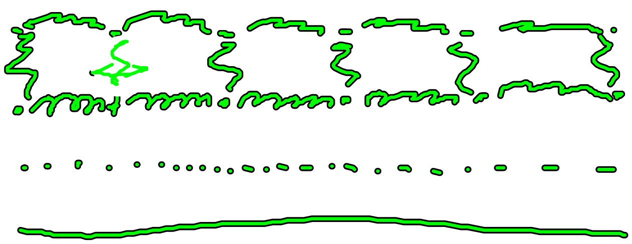
$$H = \frac12\int_V \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\, d^3r$$

$$= \frac12\int_V \varepsilon_0\left(-\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times A)^2\, d^3r$$

Einsetzen der Lösung + Orthogonalität d. Moden

$$= \frac12\sum_m \hbar\omega_m\left(a_m a_m^+ + a_m^+ a_m\right)$$

↳ nach wie vor komplexe Zahlen



Quantisierung des Multimodenfeldes

$$[a_m, a_n] = 0$$
$$[a_m^+, a_n^+] = 0$$
$$[a_m, a_n^+] = 1$$

Erinnerung: QM harmonischer Oszillator

$$H_n = \frac{p_n^2}{2} + \frac12\omega_n^2 q_n^2 \qquad [q_n, p_n] = i\hbar$$

Erzeuger / Vernichter

$$a_n = (2\hbar\omega_n)^{-1/2}(\omega_n q_n + i p_n) \quad ; \quad q_n = (\hbar/2\omega_n)^{1/2}(a_n + a_n^+)$$
$$a_n^+ = (2\hbar\omega_n)^{-1/2}(\omega_n q_n - i p_n) \quad ; \quad p_n = i(\hbar/2\omega_n)^{1/2}(a_n - a_n^+)$$

$$a_n a_n^+ = (\hbar\omega)^{-1}\left(H_n + \frac12\hbar\omega_n\right) \qquad (1)$$
$$a_n^+ a_n = (\hbar\omega)^{-1}\left(H_n - \frac12\hbar\omega_n\right) \qquad (2)$$

(1) − (2)

$$\underline{a}_n \underline{a}_n^+ - \underline{a}_n^+ \underline{a}_n = [\underline{a}_n, \underline{a}_n^+] = 1$$

(1) + (2)

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_n (\underline{a}_n \underline{a}_n^+ + \underline{a}_n^+ \underline{a}_n) = \hbar\omega_n (\underline{a}_n^+ \underline{a}_n + 1/2) = \underline{H}_n$$

Hamiltonian des Multimodenfeldes

$$H = \frac{1}{2}\sum_m \hbar\omega_m (a_m a_m^+ + a_m^+ a_m)$$

$\downarrow$ Quantisierung $\quad a_m \to \underline{a}_m$, $\quad a_m^+ \to \underline{a}_m^+$

$$\underline{H} = \frac{1}{2}\sum_m \hbar\omega_m (\underline{a}_m \underline{a}_m^+ + \underline{a}_m^+ \underline{a}_m)$$

$$= \sum_m \hbar\omega_m (\underline{a}_m^+ \underline{a}_m + 1/2)$$

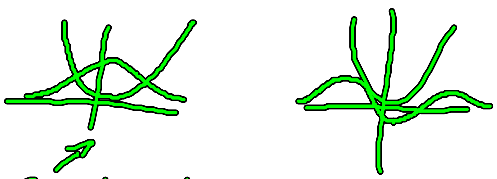
$\Rightarrow$ freies EM-Feld entspricht in quantisierter Form einer Summe von freien QM Oszillatoren!

3.2 Fock-Zustände

Einzelne Mode

$\underline{a}^+ \underline{a} |n\rangle = n |n\rangle \;\to\;$ n Photonen im Zustand $|n\rangle$

"Number state" $\equiv$ Energie-Eigenzustände des Oszillators



$E_n = \hbar\omega \cdot \frac{1}{2}$

$$\underline{H}|n\rangle = \hbar\omega(\underline{a}^+\underline{a} + \tfrac{1}{2})|n\rangle$$

$$= \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})|n\rangle \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$= E_n |n\rangle$$

$$\underline{a}^+ |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

Multi-Moden Feld

$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle \otimes \dots \otimes |n_M\rangle = |n_1 n_2 n_3 \dots n_M\rangle$ M Oszillatoren

Grundzustand

$|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \dots \otimes |0\rangle = |0,0,0,\dots 0\rangle = |0\rangle$

Energie-Erwartungswert des Grundzustandes

$$\langle 0|\underline{H}|0\rangle = \langle 0|\sum_{m=1}^{M} \hbar\omega_m (\underline{a}_m^\dagger \underline{a}_m + \tfrac{1}{2})|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\hbar\omega_m$$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\hbar\omega_m \to \infty$$

Vakuum-Energie divergiert

In der Praxis kann P..ktn die Energiedifferenzen betrachtet werden

Multimoden-Wellenfunktion im Ortsraum

$$\langle x_1 x_2 \dots x_M | n_1 n_2 \dots n_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{M!}}\frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{M} n_j!}} \begin{vmatrix} \phi_{n_1}(x_1) & \phi_{n_1}(x_2) & \dots & \phi_{n_1}(x_M) \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{n_M}(x_1) & \phi_{n_M}(x_2) & \dots & \phi_{n_M}(x_M) \end{vmatrix}_+$$

$$\phi_n(x) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)\frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}x\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}x^2}$$

Hermite Polynome

3.3 kohärente Zustände / Glauber Zustände

kohärente / Glauber Zustände sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators

$$\underline{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \quad , \quad \langle\alpha|\,\underline{a}^+ = \langle\alpha|\,\alpha^* \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

kohärente Zustand

Explizite Form

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

Überprüfung der Eigenwertgleichung

$$\underline{a}\,|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,\underline{a}|n\rangle$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$= \alpha\, e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\,|n-1\rangle$$

$$= \alpha\,|\alpha\rangle$$

Vakuum ist kohärenter Zustand mit $\alpha = 0$

$$\underline{a}\,|\alpha=0\rangle = 0 \cdot |\alpha=0\rangle = 0$$

Ortsdarstellung der kohärenten Zustand

$$\underline{a}\,|\alpha\rangle = (2\hbar\omega)^{-1/2}\,(\omega\underline{x} + i\underline{p})\,|\alpha\rangle$$

Projektion auf $\langle x|$

$$(2\hbar\omega)^{1/2}\,\alpha\,\langle x|\alpha\rangle = \langle x|\,\omega\underline{x} + i\underline{p}\,|\alpha\rangle$$

$$= \left(\omega x + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|\alpha\rangle$$

$$\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$$

Differentialgleichung

$$\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\,\psi_\alpha(x) = \left[(2\hbar\omega)^{1/2}\alpha - \omega x\right]\psi_\alpha(x)$$

Lösung

$$\psi_\alpha(x) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{\omega}{2\hbar}x^2 + \left(\frac{2\omega}{\hbar}\right)^{1/2}\alpha x - \alpha^2}$$

kohärenter Zustand in Ortsdarstellung.