VI Nichtlineare Antwort

Verschiedene Klassifizierungen der Nichtlinearitäten sind möglich:

a) Resonante WW (Frequenz des Lichts $\approx$ atomare Übergänge)
   Nichtresonante WW (Frequenz des Lichts $\not\approx$ atomare Übergänge)

b) Dielektrika (Atome, Moleküle, HL ...) $\rightarrow$ einzelne Niveaus
   geladene Flüssigkeiten (Metalle, Plasmen ...) $\rightarrow$ Vielteilchenzustände

   der Übergang ist fließend ... z.B. Halbleiter

c) Störungstheorie $\vec{P} \sim \sum_n d_n E^n$
   nicht störungstheoretisch $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$ als Fkt. gelöst
   "alle Ordnungen in E"

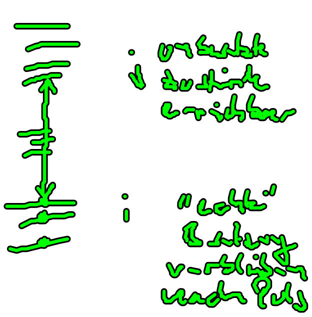
Ziel: Formulierung verschiedener Nichtlinearitäten für Beschreibung von Lichtausbreitung in verschiedenen wichtigen Grenzfällen

1. Nichtlinearitäten für lokalisierte Elektronen (Atome, Dielektrika)

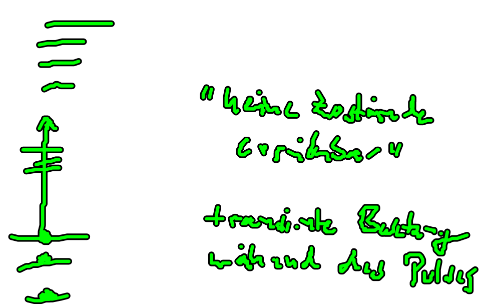
Grundlage: Dichtematrixgl. für ρ_{ij} ($i \neq j$: Nichtdiagonal El. $\rightarrow$ "coherences"; $i=j$: Diagonalel. $\rightarrow$ "populations")

$$\dot{\rho}_{ij} = i\omega_{ij}\rho_{ij} - i\sum_m \left(\Omega^*_{im}\rho_{mj} - \Omega_{jm}\rho_{im}\right)$$

<u>resonante WW</u>



<u>nichtresonante WW</u>



1.1 Exakt resonante Nichtlinearitäten im Zweiniveausystem

— $|2\rangle$ Dichtematrixgl.

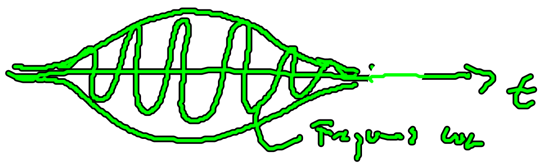
— $|1\rangle$ mit Inversionssymmetrie

$\Omega_{ii} = 0$

WW mit Puls

$$E(t) = \tilde{E}(t) \cos \omega_L t \quad , \text{ Pulsdauer } \tau$$

$\tilde{E}$: Envelope – Einhüllende



$$\dot{\rho}_{12} = i\omega_{21}\rho_{12} - i(\Omega_{21}^{*}\rho_{22} - \Omega_{21}\rho_{11}) - \gamma\rho_{12}$$

γ: Dephasing

$$\dot{\rho}_{11} = -i(\Omega_{21}^{*}\rho_{21} - \Omega_{21}\rho_{12}) - \Gamma(\rho_{11} - \rho_{11}^{0})$$

$$\dot{\rho}_{22} = -i(\Omega_{21}\rho_{12} - \Omega_{21}\rho_{21}) - \Gamma\underbrace{(\rho_{22} - \rho_{22}^{0})}_{\text{phänomenologisch ergänzt}}$$

Γ: Energierelaxation

$$\Omega_{ij}(t) = \frac{d_{ij} E(t)}{\hbar}$$

Diskussion von 3 komplementären Lösungen: nach γ, Γ, τ klassifiziert

a) Ultrakurzzeitregime: $\tau \ll \gamma^{-1}, \Gamma^{-1}$

Puls ist schneller als alle Relaxationsprozesse

d.h. Relaxationsvorgänge weglassen

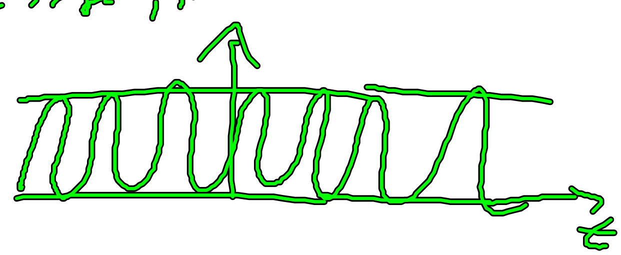
b) Ratengleichungsregime: $\tau \gg \gamma^{-1} \ll \Gamma^{-1}$

i.a. $\gamma \gg \Gamma$, weil Stöße immer die Phase zerstören, aber nicht zu Niveauänderung führen

c) Stationäres Regime: $\tau \gg \gamma^{-1}, \Gamma^{-1}$

ganz langer Puls

erlaubt stationäre Lsg.



Anwendung der RWA "rotating-wave-approximation" – Drehwellennäherung

$E = \tilde{E}(t)\cos(\omega_L t)$ am Ort d. Atoms

$\dot\rho_{ij} \sim i\omega_{ij}\rho_{ij}$ + Quelle $(\cos \omega_L t)$ $\quad \omega_L \approx |\omega_{ij}|$

Ansatz: $\rho_{ij} \sim \tilde\rho_{ij}\, e^{-i\omega_L t}$ und dann „langsame" Gl. für $\tilde\rho_{ij}$ konstruieren

geht, wenn

a)  Puls viele Oszillationen beinhaltet

b) $\omega_L \approx \omega_{ij}$

c) Ω, γ, T etc $< \omega_{ij}$

-> dann kann RWA gemacht werden

$\omega_1 - \omega_2 < 0$

$\rho_{12} = \tilde\rho_{12}\, e^{i\omega_L t}$

$\Omega_{12} = \frac{1}{2}\tilde\Omega_{12} e^{+i\omega_L t} + \frac{1}{2}\tilde\Omega_{12}^* e^{-i\omega_L t}$

$$\dot{\tilde\rho}_{12} = i\underbrace{(\omega_{12}+\omega_L)}_{\delta_{12}\ \text{„Verstimmung"}}\tilde\rho_{12} - i\Big\{\Big(\frac{1}{2}\tilde\Omega_{12}^*(t)e^{-i\omega_L t} + \frac{1}{2}\tilde\Omega_{12}e^{+i\omega_L t}\Big)\rho_{22}(t) - \Big(\frac{1}{2}\tilde\Omega_{12}(t)e^{-i\omega_L t} + \frac{1}{2}\tilde\Omega_{12}^* e^{i\omega_L t}\Big)\rho_{11}(t)\Big\}e^{i\omega_L t}$$

„RWA"

$$= i\delta_{12}\tilde\rho_{12} - i\Big\{\Big(\frac{1}{2}\tilde\Omega_{12}^*(t) + \cancel{\frac{1}{2}\tilde\Omega(t)e^{2i\omega_L t}}\Big)\rho_{22}(t) - \Big(\frac{1}{2}\tilde\Omega_{12}(t) + \cancel{\frac{1}{2}\tilde\Omega_{ij}^*(t)e^{2i\omega_L t}}\Big)\rho_{11}(t)$$

$$\dot{\tilde\rho}_{12}(t) = i\delta_{12}\tilde\rho_{12} + i\frac{\tilde\Omega_{12}(t)}{2}\big(\rho_{11}(t) - \rho_{22}(t)\big) - \gamma\tilde\rho_{12}(t)$$

analog

$$\dot{\tilde\rho}_{11}(t) = -\frac{i}{2}\big(\tilde\Omega_{12}(t)\tilde\rho_{21}(t) - \tilde\Omega_{12}^*(t)\tilde\rho_{12}(t)\big) - T(\tilde\rho_{11} - \rho_{11}^0)$$

$$\dot{\tilde\rho}_{22}(t) = +\frac{i}{2}\big(\tilde\Omega_{21}(t)\tilde\rho_{21}(t) - \tilde\Omega_{12}(t)\tilde\rho_{12}(t)\big) - T(\tilde\rho_{22} - \rho_{22}^0)$$

ohne Relaxation $\frac{d}{dt}\tilde\rho_{11} = -\frac{d}{dt}\tilde\rho_{22}$ $\quad \tilde\rho_{11} + \tilde\rho_{22} = 1$

Zweiniveaugl. in RWA

jetzt Diskussion der versch. Grenzfälle

$$\tilde{\hat{\Omega}} \to \Omega \,, \quad \tilde{\hat{\rho}} \to \rho$$

α) Ultrakurzzeit regime: Rabi oszillationen

Annahme $\delta_{21} = 0$, volle Resonanz

$|2\rangle$ $\rho_{22} = 0$, $|1\rangle$ $\rho_{11} = 1$: $\Delta = 1$

$|2\rangle$ $\rho_{22} = 1$, $|1\rangle$ $\rho_{11} = 0$: $\Delta = -1$

$$(1) \qquad \dot{\rho}_{12} = + \frac{i}{2} \Omega_{21}(t) \underbrace{(\rho_{11}(t) - \rho_{22}(t))}_{\Delta(t) \text{ "Inversion"}}$$

$$(2) \qquad \dot{\rho}_{11}(t) - \dot{\tilde{\rho}}_{22}(t) = -i \left(\Omega_{21}(t) \rho_{12}(t) - \Omega_{12}(t) \rho_{21}(t) \right)$$

$\rho_{12} = i\rho$ Ansatz f. reelles $\Omega_{ij} = \Omega$, $\rho \in \mathbb{R}$

$$(1) \to \qquad \dot{\rho} = + \frac{1}{2} \Omega \Delta$$

$$(2) \to \qquad \dot{\Delta} = -i\Omega(-2i\rho) = -2\Omega\rho$$

neue Koordinate $\Theta(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, \Omega(t')$ Fläche des Felds (nicht Intensität)

$$(1) \to \qquad \rho' = \frac{1}{2} \Delta$$

$$(2) \to \qquad \Delta' = -2\rho$$

Ableitung n. Θ

$$\Delta'' = -\Delta \qquad \Delta = \cos(\Theta(t)) = \cos\left(\int_{-\infty}^{t} dt' \, \Omega(t')\right)$$

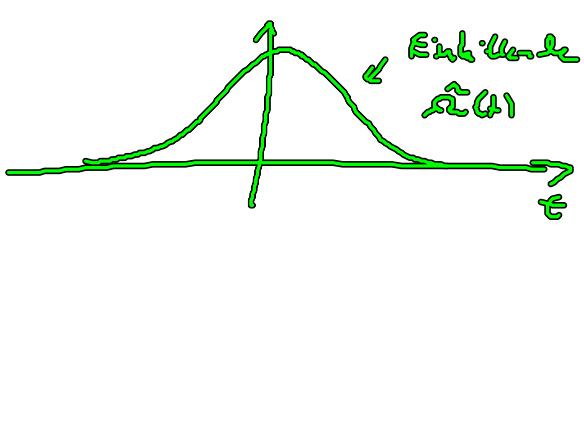
für Anfangsbedingung $\Delta = 1$

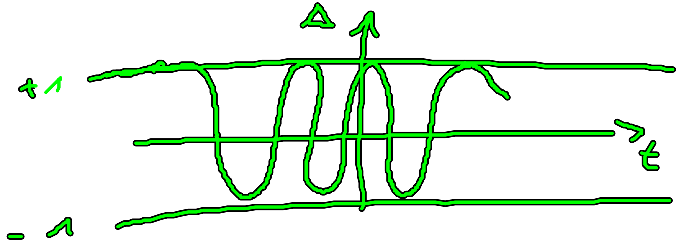
$$\rho = \frac{1}{2} \sin\left(\int_{-\infty}^{t} dt' \, \Omega(t')\right)$$

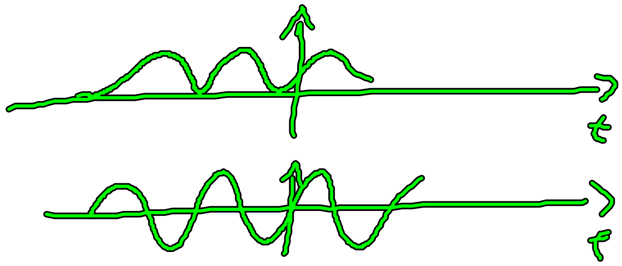
Pulsfläche

$$\rho_{12} = \frac{i}{2} \sin\left(\int_{-\infty}^{t} dt' \, \Omega(t')\right) \qquad \text{"Rabi-Oszillation"}$$

später: in Wellengl. → Solitonen







$\Delta = \rho_{11} - \rho_{22}$

$1 = \rho_{11} + \rho_{22}$

$\Delta = 1 - 2\rho_{22}$

$\rho_{22} = \frac{1}{2}(1-\Delta)$

Macht Sinn Pulse $\Theta(\infty)$ nach Fläche zu benennen:

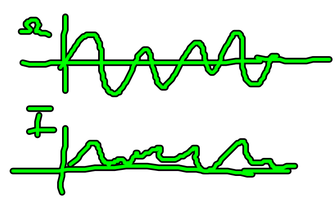
$t=-\infty$ $\qquad\qquad$ $t=+\infty$

$\Theta(\infty) = \frac{\pi}{2}$ Puls: $\Delta(-\infty)=1 \rightarrow \Delta(+\infty)=0$ ($\rho_{11}=\rho_{22}=\frac{1}{2}$ Gleichbesetzung)

π Puls: $\Delta(-\infty)=1 \rightarrow \Delta(+\infty)=-1$ ($\rho_{11}=0$, $\rho_{22}=1$)

2π Puls: $\Delta(-\infty)=1 \rightarrow \Delta(+\infty)=1$ ($\rho_{11}=1$, $\rho_{22}=0$)

existieren 0π Pulse mit Intensität $\neq 0$



b) Ratengleichungen: Sättigungseffekte

Annahme $\delta_L = 0$ $\quad$ $\gamma \gg \Omega$ $\quad$ und ∂_t in $\dot\rho_{12}(t)$

↳ Eliminieren der Übergangsamplitude

$$\cancel{\dot\rho_{12}}^{\to 0} + \gamma\rho_{12} = \frac{i}{2}\Omega_{21}\Delta \quad\rightarrow\quad \rho_{12} = \frac{i}{2}\frac{\Omega_{21}\Delta}{\gamma}$$

γ groß gegen $\dot\rho_{12}$

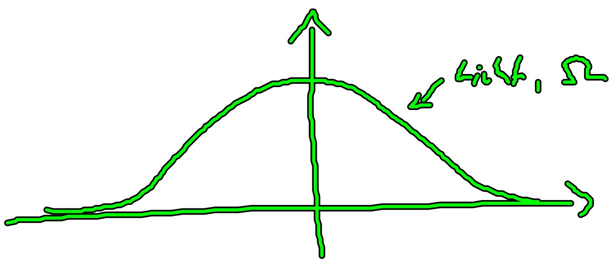
$$\dot\Delta = -\frac{i}{2}\left(\Omega_{21}\rho_{21} - \Omega_{12}\rho_{12}\right)$$

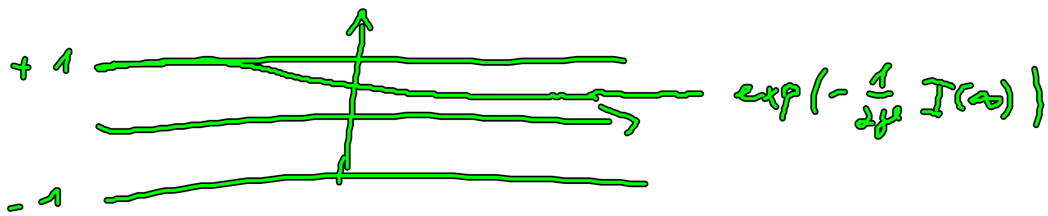
$$= -\frac{i}{2}\left(\Omega_{21}\left(-\frac{i}{2}\Omega_{12}\frac{\Delta}{\gamma}\right) - \Omega_{12}\left(\frac{i}{2}\Omega_{21}\frac{\Delta}{\gamma}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}|\Omega_{21}|\frac{\Delta}{\gamma}$$

$$\Delta = \exp\left(-\frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{t} dt'\,\Omega^2(t')\right) \quad \text{mit} \quad \Delta(-\infty) = 1$$

$$\rho_{12} = \frac{i}{2}\frac{\Omega_{21}}{\gamma}\Delta = \frac{i}{2\gamma}\Omega_{21}\exp\left(-\frac{1}{2\gamma}\int_{-\infty}^{t} dt'\,\Omega^2(t')\right)$$





$\Delta = 0 \rightarrow \rho_{11} = \rho_{22} \;\hat{=}\;$ Gleichbesetzung beider Niveaus ist maximal erreichbar

c) stationäre Lösungen

$\dot{\rho}_{12} = 0 \qquad \tau \gg \gamma^{-1}, \Gamma^{-1}$

(1) $$\rho_{12} = \frac{i}{2}\frac{\Omega_{21}\Delta}{\gamma} \qquad \text{(aus Teil b)}$$

$$\Gamma(\Delta - \Delta_0) = -\frac{1}{2}|\hat{\Omega}_{21}|^2\frac{\Delta}{\gamma}$$

$$\Delta\left(\Gamma + \frac{\hat{\Omega}^2}{2\gamma}\right) = \Delta_0\Gamma$$

(2) $$\Delta = \frac{\Delta_0\Gamma}{\Gamma + \frac{\hat{\Omega}_{21}^2}{2\gamma}} = \frac{\Delta_0}{1 + \hat{\Omega}_{21}^2/2\gamma\Gamma}$$

(2) in (1)

$$\rho_{12} = \frac{i}{2\gamma}\frac{\Omega_{21}\Delta_0}{(1 + |\hat{\Omega}|^2/2\gamma\Gamma)}$$

- ein starkes Feld $\hat{\Omega} \rightarrow \infty$ sättigt das atomare System

$\Delta \rightarrow 0 \rightarrow \rho_{11} = \frac{1}{2} = \rho_{22}$

- δ und g_{12} folgen dem Feld adiabatisch