3.3 kohärente Zustände / Glauber Zustände

kohärente Zustände (Glauber-Zustände) sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators

$$\underline{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \quad , \quad \langle\alpha|\,\underline{a}^\dagger = \langle\alpha|\,\alpha^*$$

Explizite Form

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

Überprüfung der Eigenwertgleichung

$$\underline{a}\,|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,\underline{a}\,|n\rangle$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$= \alpha\, e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}\,|n-1\rangle$$

$$= \alpha\,|\alpha\rangle$$

Vakuum ist kohärenter Zustand mit $\alpha=0$

$$\underline{a}\,|\alpha=0\rangle = 0\cdot|\alpha=0\rangle = 0$$

$$\boxed{\psi_\alpha(x,t) = \langle x|\alpha(t)\rangle}$$

Varianz von Ort und Impuls

$$\langle x\rangle_\alpha = \langle\alpha|x|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,\langle\alpha|\underline{a}+\underline{a}^\dagger|\alpha\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,(\alpha+\alpha^*)\,\langle\alpha|\alpha\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,(\alpha+\alpha^*)$$

$$\langle x^n\rangle_\alpha$$

$$\langle x^2\rangle_\alpha = \langle\alpha|x^2|\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2\omega}\,\langle\alpha|(\underline{a}+\underline{a}^\dagger)^2|\alpha\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2\omega}\left(1+(\alpha+\alpha^*)^2\right)$$

$$(\Delta x)^2_\alpha = \langle x^2\rangle_\alpha - \langle x\rangle^2_\alpha = \frac{\hbar}{2\omega}$$

Analog findet man

$$(\Delta p)^2_\alpha = \frac{\hbar\omega}{2}$$

Unschärfe Produkt

$$(\Delta x)^2_\alpha \cdot (\Delta p)^2_\alpha = \frac{\hbar^2}{4} \rightarrow$$ kohärente Zustände sind Quantenzustände mit minimaler Unschärfe

Erwartungswert des Teilchenzahloperators

$$\langle\alpha|\underline{n}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\underline{a}^+\underline{a}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha^*\alpha|\alpha\rangle$$
$$= |\alpha|^2\langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \equiv \bar{n} = \langle n\rangle_\alpha$$

Varianz

$$(\Delta n)^2_\alpha = \langle\alpha|(\underline{n}-\bar{n})^2|\alpha\rangle$$
$$= \langle\alpha|\underline{n}^2|\alpha\rangle - 2\bar{n}\langle\alpha|\underline{n}|\alpha\rangle + \bar{n}^2\langle\alpha|\alpha\rangle$$
$$= \langle\alpha|\underline{n}^2|\alpha\rangle - \bar{n}^2$$

Normalordnung

$$\underline{n}^2 = \underline{a}^+\underline{a}\,\underline{a}^+\underline{a} = \underline{a}^+\underline{a} + \underline{a}^+\underline{a}^+\underline{a}\,\underline{a}$$

"alle Vernichter nach rechts durchtauschen"

$$:a^+a\,a^+a:$$

$$\langle\alpha|\underline{n}^2|\alpha\rangle = \langle\alpha|\underline{a}^+\underline{a}|\alpha\rangle + \langle\alpha|\underline{a}^+\underline{a}^+\underline{a}\,\underline{a}|\alpha\rangle$$
$$= \alpha^*\alpha\langle\alpha|\alpha\rangle + \alpha^*\alpha^*\alpha\alpha\cdot\langle\alpha|\alpha\rangle$$
$$= \bar{n} + \bar{n}^2$$

$$(\Delta n)^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \bar{n} \quad = \langle n\rangle$$

Überlapp mit Energieeigenzuständen "Number states", Fock-Zustände

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\langle n|m\rangle$$

Orthogonalität

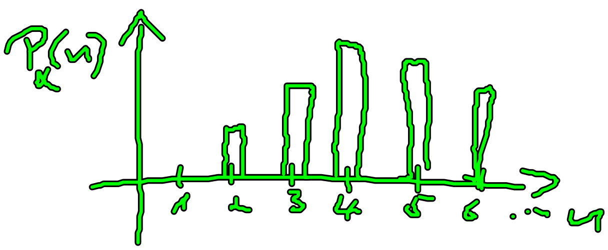
$$= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}\delta_{n,m}$$
$$= e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

Wahrscheinlichkeit n Photonen in einem kohärenten Zustand zu finden

$$P_\alpha(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{(\alpha^2)^n}{n!} \qquad \bar{n} = |\alpha|^2$$

$$= e^{-\bar{n}}\frac{(\bar{n})^n}{n!} = e^{-\langle n\rangle}\frac{\langle n\rangle^n}{n!}$$

↑ Poissonverteilung



<u>Definition: Verschiebungsoperator</u>

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$$

Eigenschaften

1) $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$

2) $D^\dagger(\alpha)\, a\, D(\alpha) = a + \underbrace{\alpha}_{\text{Zahl}}\cdot\mathbb{1}$

3) $D^\dagger(\alpha)\, a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$

4) $D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)\,e^{-i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)}$

(ohne Beweis)

Kohärente Zustände als Verschiebung des Vakuum Zustands

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

<u>Beweis</u>

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$a\, D(-\alpha)|\alpha\rangle = D(-\alpha)\underbrace{D^\dagger(-\alpha)\, a\, D(-\alpha)}_{a-\alpha}|\alpha\rangle \qquad \text{Eigenschaft 2)}$$

$$= D(-\alpha)\underbrace{(a-\alpha)|\alpha\rangle}_{a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle} = 0$$

$$\underline{a}\,\underbrace{D(-\alpha)|\alpha\rangle}_{=|0\rangle} = 0$$

$$D(-\alpha)|\alpha\rangle = |0\rangle \qquad |\, D(\alpha)$$

$$\underbrace{D(\alpha)\,D(-\alpha)}_{\mathbb{1}}|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$$

$$\underline{|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle}$$

3.4 Squeezed states

"komprimierte Zustände"

Definition der Quadratur Operatoren

$$\underline{X} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\,\underline{q} \qquad \text{"Ort"}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{2i}(\underline{a} - \underline{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\,\underline{p} \qquad \text{"Impuls"}$$

$$[\underline{X}, \underline{Y}] = \frac{i}{2}$$

Elektrischer Feldoperator für einzelne Mode (1M)

$$\underline{E}^{1M}(\vec{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\,\vec{e}_m\left[\underline{a}\,e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} - \underline{a}^+ e^{-i\vec{k}\vec{r}+i\omega t}\right]$$

$$= 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\,\vec{e}_m\left[\underline{X}\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) - \underline{Y}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right]$$

Für kohärente Zustände

$$\langle\alpha|\underline{X}|\alpha\rangle = \mathrm{Re}\,\alpha \qquad \langle\alpha|\underline{X} + i\underline{Y}|\alpha\rangle = \alpha$$

$$\langle\alpha|\underline{Y}|\alpha\rangle = \mathrm{Im}\,\alpha$$

$$\langle\alpha|(\Delta X)^2|\alpha\rangle = \frac{1}{4}$$

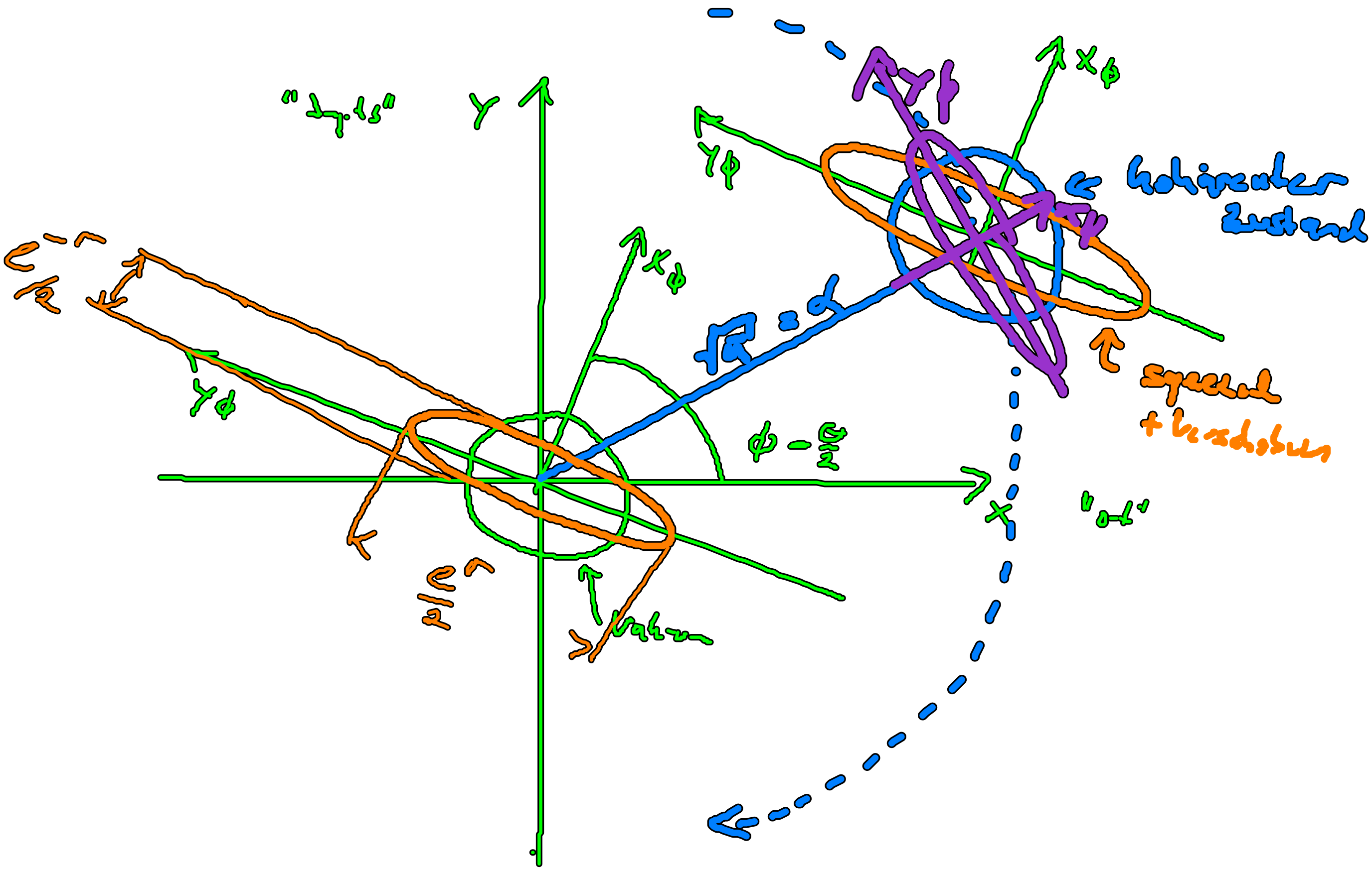
$$\langle\alpha|(\Delta Y)^2|\alpha\rangle = \frac{1}{4}$$

Rotierte Quadratur Operatoren

$$\underline{X}_\phi = \frac{1}{2}\left(\underline{a}\,e^{-i\phi} + \underline{a}^\dagger e^{+i\phi}\right)$$

$$\underline{Y}_\phi = \frac{1}{2i}\left(\underline{a}\, e^{-i\phi} - a^+ e^{+i\phi}\right)$$

Phasenraum-Darstellung



„Squeeze"-Operator

$$\underline{S}(\eta) \equiv e^{\frac{1}{2}\left(\eta^* \underline{a}^2 - \eta\, \underline{a}^{+2}\right)}, \quad \eta = 0 \Rightarrow S(\eta) = \underline{\mathbb{1}}$$

keine Kompression

Squeeze-Parameter (in Polardarstellung)

$$\eta = r e^{i\theta} \qquad \eta \in \mathbb{C}, \quad r, \theta \in \mathbb{R}$$

Ähnlichkeitstransformation

$$\underline{A} = S(\eta)\, \underline{a}\, S^+(\eta)$$

BCH-Formel

$$= \underline{a} \cosh r + \underline{a}^+ e^{i\theta} \sinh r$$

$$= \mu\, \underline{a} + \nu\, a^+$$

$\mu = \cosh r \in \mathbb{R} \qquad \nu = e^{i\theta}\sinh r \in \mathbb{C}$

Relation von alten/neuen Operatoren

$$\underline{a} = \mu \underline{A} - \nu \underline{A}^+$$
$$\underline{a}^+ = \mu \underline{A}^+ - \nu^* \underline{A}$$

Allgemeine Definition des "squeezed states"

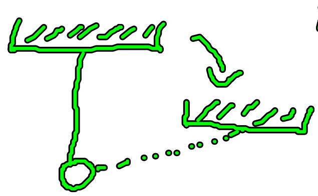
$$|\alpha,\xi\rangle = D(\alpha)\, S(\xi)\, |0\rangle$$

↳ Kompression um e^{-2r} in Richtung ϕ

↳ Verschiebung um α

Mechanisches Analogon

kohärente Zustände



instantane Verlegung des Aufhängepunkts

komprimierte Zustände

Verlegung des Aufhängepunkts und Änderung der Oszillatorfrequenz „Pendellänge"

Verschiebung und Kompression kommutieren nicht

$$D(\alpha)\, S(\xi) = S(\xi)\, D(\beta)$$

$$\beta = \alpha \cosh r + \alpha^* e^{i\theta} \sinh r$$

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-iHt}|\alpha\rangle$$

Verschobene Erwartungswerte

$$\langle \alpha,\xi | \underline{a} | \alpha,\xi \rangle = \mu\beta - \nu\beta = \alpha$$
$$\langle \alpha,\xi | \underline{a}^+\underline{a} | \alpha,\xi \rangle = \sinh^2 r + |\alpha|^2$$

analog

$$\langle \alpha,\xi | (\Delta X_\phi)^2 | \alpha,\xi \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r}$$
$$\langle \alpha,\xi | (\Delta Y_\phi)^2 | \alpha,\xi \rangle = \frac{1}{4} e^{+2r}$$

$$(\Delta x_\phi)^2 \cdot (\Delta y_\phi)^2 = \frac{1}{4}$$

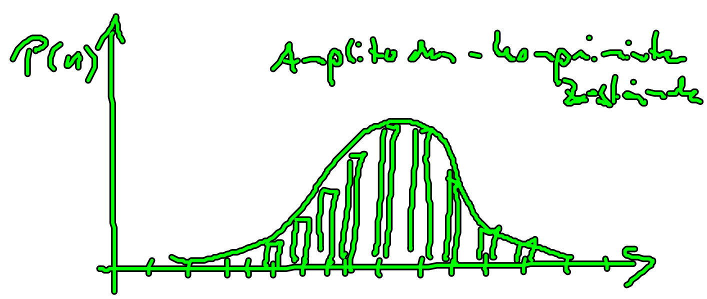
Photon-Statistik von komprimierten Zuständen

Photon Statistik (Population von Energie-Eigenzuständen)

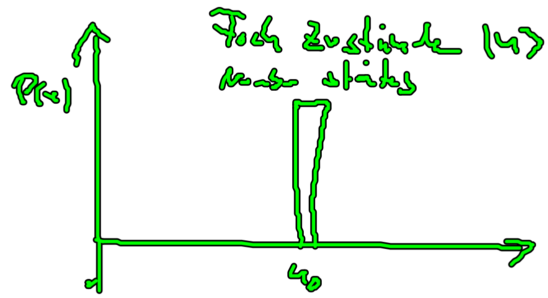
$$P(n) = |\langle n | \alpha, \zeta \rangle|^2$$

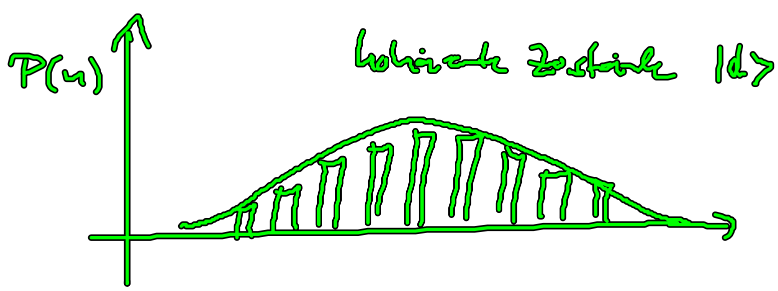
$$\langle n | \alpha, \zeta \rangle = \frac{1}{\sqrt{n! \cosh r}} \left[\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r \right]^{n/2} e^{-\frac{1}{2}\left(|\alpha|^2 + \alpha^{*2} e^{i\theta} \tanh r\right)} \times H_n\left(\frac{\alpha + \alpha^* e^{i\theta} \tanh r}{(2 e^{i\theta} \tanh r)^{1/2}} \right)$$

Zusammenfassung Photonen-Statistik



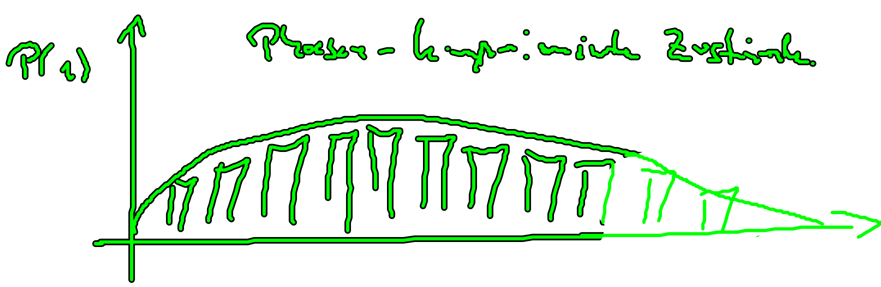
$\longrightarrow$ extremer Limit

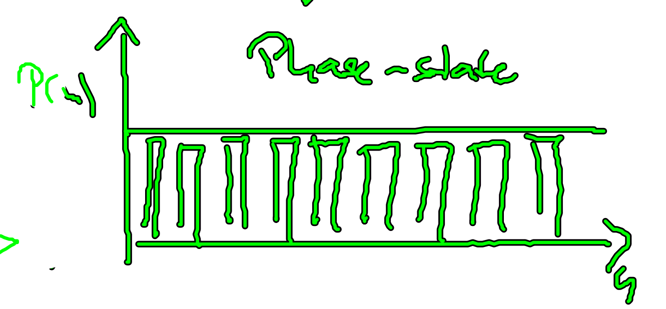


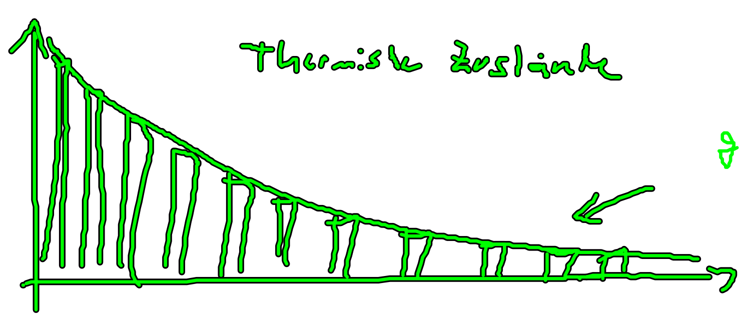


$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}$$

Poisson-Verteilung







geometrische Verteilung

$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{(1 + \langle n \rangle)^{n+1}}$$

Bose - Einstein Verteilung