

5.3 Jaynes Cummings Modell

Jaynes-Cummings (JC) Modell

- Zwei-Niveau System plus einzelne quantisierte Feldmode
- einfachste Modell für Feld-Materie Wechselwirkung
- exakt lösbar

Ausgangspunkt Atom-Feld Hamiltonian in Dipol Näherung

$$H = \underbrace{\sum_{\underline{k}} \hbar \omega_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^{\dagger} a_{\underline{k}}}_{\text{Feld}} + \underbrace{\sum_j E_j |E_j\rangle \langle E_j|}_{\text{Atom}} + \hbar \underbrace{\sum_{ij} \sum_{\underline{k}} g_{\underline{k}}^{ij} |E_i\rangle \langle E_j|}_{\text{Dipol Kopplung "}-\underline{e}_r \cdot \underline{E}"} (a_{\underline{k}} + a_{\underline{k}}^{\dagger})$$

$$g_{\underline{k}}^{ij} = -\frac{e}{\hbar} Q_{\underline{k}} \underline{\epsilon}_{\underline{k}} \cdot \langle E_i | \underline{r} | E_j \rangle \quad Q_{\underline{k}} = \left(\frac{\hbar \omega_{\underline{k}}}{2 \epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Atom reduziert auf zwei Niveaus $|E_1\rangle, |E_2\rangle$

$$\rightarrow g_{\underline{k}} = \delta_{\underline{k}}^{12} = \delta_{\underline{k}}^{21}$$

$$\sigma_3 = |E_1\rangle \langle E_1| - |E_2\rangle \langle E_2|, \quad \mathbb{1} = |E_1\rangle \langle E_1| + |E_2\rangle \langle E_2|$$

$$\sigma_+ = -i |E_1\rangle \langle E_2|, \quad [\sigma_-, \sigma_+] = -\sigma_3$$

$$\sigma_- = i |E_2\rangle \langle E_1|, \quad [\sigma_-, \sigma_3] = 2\sigma_-$$

$$E_1 |E_1\rangle \langle E_1| + E_2 |E_2\rangle \langle E_2| = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_3 + \frac{1}{2} (E_1 + E_2)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\hbar} (E_2 - E_1)$$

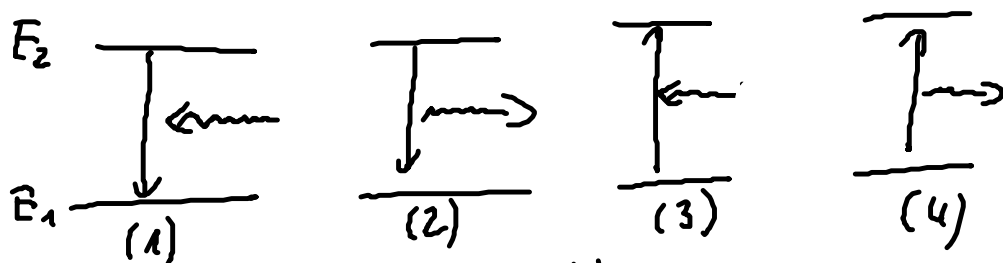
konstanter Term
kann ignoriert werden

Hamiltonoperator für zwei Niveaus System plus Feld

$$H = \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^{\dagger} a_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_3 + \sum_{\underline{k}} i g_{\underline{k}} (\sigma_- - \sigma_+) (a_{\underline{k}} + a_{\underline{k}}^{\dagger})$$

Kopplaterme

$$(\sigma_- - \sigma_+)(a_{1k} + a_{2k}^\dagger) = \underbrace{\sigma_- a_{1k}} + \underbrace{\sigma_- a_{2k}^\dagger} - \underbrace{\sigma_+ a_{1k}} - \underbrace{\sigma_+ a_{2k}^\dagger}$$



Prozesse (2), (3) sind energie erhaltend, während bei den Einzelprozessen in (1) und (4) die Energie nicht erhalten wird. Vernachlässigen der Terme (1), (4) entspricht Drehwellennäherung (Rotating wave approximation).

Für den Fall einer einzigen Mode resultiert

$$\| H_{JC} = \hbar \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_3 + i \hbar g (a^\dagger \sigma_- - \sigma_+ a) \|$$

Jaynes Cummings Hamiltonian

(g kann real gewählt durch geschickte Wahl der Basis)

$$= H_F + H_A + H_I$$

Anregungsoperator

$$N = a^\dagger a + \frac{1}{2} (\sigma_3 + I)$$

kommutiert mit der JC-Hamiltonian

$$[H_{JC}, N]_- = 0 \Rightarrow \text{Summe der Anregungen eine Erhaltungsgröße ist.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} [H_I, a^\dagger a] &= i \hbar g \left(\underbrace{[a^\dagger \sigma_-, a^\dagger a]} - \underbrace{[\sigma_+ a, a^\dagger a]} \right) \\ &= i \hbar g \left(\underbrace{\sigma_- a^\dagger [a, a]}_{-1} - \underbrace{\sigma_+ [a, a^\dagger]}_{+1} \right) \\ &= -i \hbar g (\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} [H_I, \sigma_3]_- = \frac{i \hbar g}{2} (a^\dagger [\sigma_-, \sigma_3] - [\sigma_+, \sigma_3] a)$$

$$= +i\hbar g (\overbrace{\sigma_- a^\dagger}^{2\sigma_-} + \overbrace{\sigma_+ a}^{-2\sigma_+})$$

Mit \mathcal{N} lässt sich der JC-Hamiltonian schreiben als

$$H_{JC} = \hbar\omega (\mathcal{N} - \frac{1}{2}I) - \hbar \frac{\Delta}{2} \sigma_3 + i\hbar g (\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger)$$

Term trägt nicht zur Dynamik bei, sondern führt nur zu einer Phase

Detuning

$$\Delta = \omega - \omega_0$$

Modulfrequenz

atomare Resonanzfrequenz

Eliminierung der Phase

$$|2\rangle \rightarrow |\tilde{2}\rangle = U|2\rangle, \quad U^{-1} = U^\dagger \Rightarrow \langle \tilde{2} | \tilde{2} \rangle = \langle 2 | 2 \rangle = 1$$

$$H_{JC} \rightarrow \tilde{H}_{JC} = U H_{JC} U^\dagger - i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger$$

Wahl der unitären Transformation

$$U = \exp(i(\mathcal{N} - \frac{1}{2}I)\omega t)$$

(weglassen von \sim)

$$\leadsto \parallel H_{JC} = -\hbar \frac{\Delta}{2} \sigma_3 + i\hbar g (\sigma_+ a - \sigma_- a^\dagger)$$

Dressed States

$$H_{JC} |E_{1, n+1}\rangle = \frac{\hbar\Delta}{2} |E_{1, n+1}\rangle + i\hbar g \sqrt{n+1} |E_{2, n}\rangle$$

$$H_{JC} |E_{2, n}\rangle = -\frac{\hbar\Delta}{2} |E_{2, n}\rangle - i\hbar g \sqrt{n+1} |E_{1, n+1}\rangle$$

\Rightarrow Die entarteten Eigenzustände von \mathcal{N} bilden ein geschlossenes Untervektorraum.

Abkürzung

$$|\phi_{1, n}\rangle = |E_1\rangle |n+1\rangle$$

$$|\phi_{2, n}\rangle = |E_2\rangle |n\rangle$$

Identität

$$I = |E_1\rangle \langle 0| \langle 0| \langle E_1| + \sum_{n=0}^{\infty} (|\phi_{1, n}\rangle \langle \phi_{1, n}| + |\phi_{2, n}\rangle \langle \phi_{2, n}|)$$

Matrixelemente

$$n \neq n' \quad \langle \phi_{in} | H_{JC} | \phi_{jn'} \rangle = 0, \quad \text{außer } n=n'$$

$$n = n' \quad \langle \phi_{in} | H_{JC} | \phi_{jn'} \rangle \rightarrow \hbar \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2} & ig\sqrt{n+1} \\ -ig\sqrt{n} & -\frac{\Delta}{2} \end{pmatrix} = H_{2 \times 2}$$

Eigenwerte der 2×2 Blöcke

$$- \text{Tr } H_{2 \times 2} = 0$$

$$- \text{Det } H_{2 \times 2} = -\frac{\hbar^2}{4} (\Delta^2 + 4g^2(n+1))$$

$$\pm \frac{\hbar}{2} \Omega_n = \left(\frac{\text{Tr } H_{2 \times 2}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Tr } H_{2 \times 2}}{2} \right)^2 - \text{Det } H_{2 \times 2}}$$

$$\| \Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4g^2(n+1)} \|$$

n -teser Rabi-Frequenz

Eigenvektoren

$$\| |n, \pm\rangle = \frac{1}{N_{\pm}} \left[-2ig\sqrt{n+1} |\phi_{1n}\rangle + (\Delta \pm \Omega_n) |\phi_{2n}\rangle \right]$$

"Dressel states"

Normierung

$$N_{\pm} = \left(4g^2(n+1) + \Delta^2 \pm 2\Delta\Omega_n + \Omega_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2\Omega_n(\Omega_n \pm \Delta)}$$

$$\| | \psi(t) \rangle = c_{1,0} e^{-i\frac{\Delta t}{2}} |\phi_{1,0}\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n |n, +\rangle e^{-i\Omega_n \frac{t}{2}} + d_n |n, -\rangle e^{+i\Omega_n \frac{t}{2}} \right)$$

Die Konstanten $c_{1,0}, b_n, d_n$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen, $|\psi(t=0)\rangle$

Beispiel für JC-Zerentwicklung

Exakte Resonanz $\Delta=0 \leadsto \Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$

Feld im Fock-Zustand $|n\rangle$, Atom im angeregten Zustand $|E_2\rangle$

$$|\psi(t=0)\rangle = |E_2\rangle |n\rangle = |\phi_{2n}\rangle$$

$$|n_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [-i|\phi_{1n}\rangle \pm |\phi_{2n}\rangle]$$

$$|\phi_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|n_{1+}\rangle - |n_{1-}\rangle]$$

$$\text{wobei } b_n = \frac{1}{\sqrt{2}}, d_n = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|n_{1+}\rangle e^{-i\Omega_n t/2} - |n_{1-}\rangle e^{+i\Omega_n t/2}] \\ &= |\phi_{2n}\rangle \cos(\Omega_n t/2) - |\phi_{1n}\rangle \sin(\Omega_n t/2) \end{aligned}$$

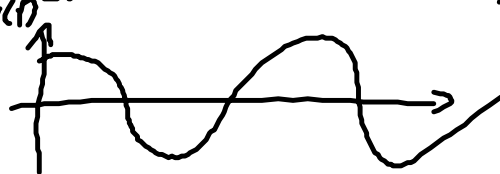
Atomare Inversion

$$W(t) = \langle \psi(t) | \sigma_3 | \psi(t) \rangle$$

$$= \cos^2(\Omega_n t/2) - \sin^2(\Omega_n t/2)$$

$$\begin{cases} +1 \text{ für } |E_2\rangle \\ -1 \text{ für } |E_1\rangle \end{cases}$$

$$\| W(t) = \cos(\Omega_n t) \|$$



Rabi-Oszillation

Falls $n=0$, $\Omega_n = 2g$, spontan Zerfall

Quanten-Revivals

Anfangszustand: Atom in $|E_2\rangle$, Feld in allgemeinem Zustand

$$|\psi(t=0)\rangle = |E_2\rangle \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle, \quad b_n = -d_n = \frac{1}{\sqrt{2}} c_n$$

Zeitentwicklung

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2}} (|n_{1+}\rangle e^{-i\Omega_n t/2} - |n_{1-}\rangle e^{+i\Omega_n t/2}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (|\phi_{2n}\rangle \cos(\Omega_n t/2) - |\phi_{1n}\rangle \sin(\Omega_n t/2)) \end{aligned}$$

Inversion

$$\| W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \cos(\Omega_n t) \|$$

Beispiel: Kohärente Zustände

$$|c_n|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{(\bar{n})^n}{n!}$$

$$W(t) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^n}{n!} \cos(2g\sqrt{n+1}t)$$

$\bar{n} \sim 10^{-5}$ Rabi-Oszillation mit Periode $2g t$

$\bar{n} \sim 10^{-1}$ inkohärentes Verhalten
 $\bar{n} \sim 10$ Revivals



Taylor Entwicklung

$$n = \bar{n} + \delta n$$

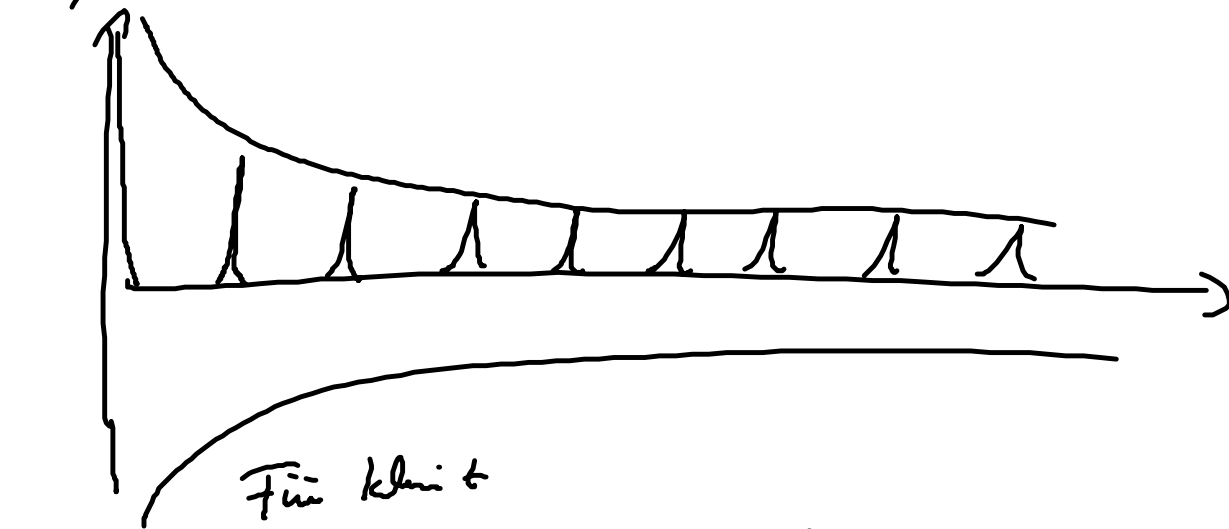
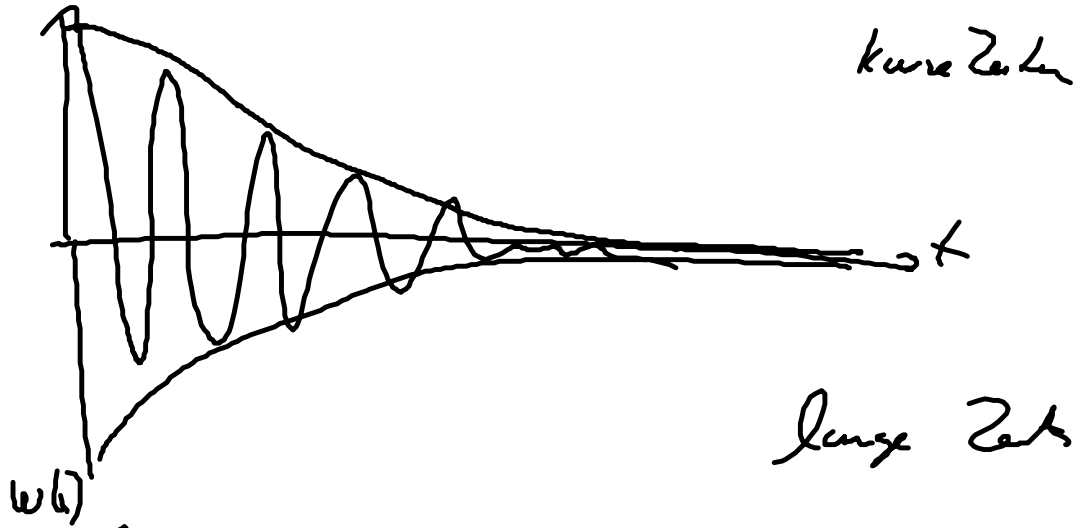
$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} &= \sqrt{\bar{n} + \delta n + 1} = \sqrt{\bar{n} + 1} \sqrt{1 + \frac{\delta n}{\bar{n} + 1}} \approx \sqrt{\bar{n} + 1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta n}{\bar{n} + 1}\right) \\ &= \sqrt{\bar{n} + 1} + \frac{n - \bar{n}}{2\sqrt{\bar{n} + 1}} = \frac{2\bar{n} + 2 - \bar{n} + n}{2\sqrt{\bar{n} + 1}} = \frac{\bar{n} + 2}{2\sqrt{\bar{n} + 1}} + \frac{n}{2\sqrt{\bar{n} + 1}} \end{aligned}$$

$$W(t) = e^{-\bar{n}} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{2i g t \left(\frac{\bar{n} + 2}{2\sqrt{\bar{n} + 1}} + \frac{n}{2\sqrt{\bar{n} + 1}} \right)} \right]$$

$$= e^{-\bar{n}} \operatorname{Re} \left[\exp \left[2i g t \frac{\bar{n} + 2}{2\sqrt{\bar{n} + 1}} + \bar{n} \exp \left(\frac{2i g t}{2\sqrt{\bar{n} + 1}} \right) \right] \right]$$

$$W(t) = \exp(\bar{n} \left\{ \cos \left(\frac{g t}{\sqrt{\bar{n} + 1}} \right) - 1 \right\})$$

$$\cos \left[\frac{\bar{n} + 2}{\sqrt{\bar{n} + 1}} g t + \bar{n} \sin \left(\frac{g t}{\sqrt{\bar{n} + 1}} \right) \right]$$



Für kleine t

$$\cos \frac{gt}{\sqrt{\bar{n}+1}} - 1 \approx -\frac{g^2 t^2}{2(\bar{n}+1)}$$

Gaußsche Dekayung.

→ Dämpfung der kollektiven Rabi Oszillationen mit Gauß Profil und charakteristischer Zeitskala

$$\tau_{\text{Kollaps}} = \frac{\sqrt{\bar{n}+1}}{g} = \frac{2(\bar{n}+1)}{J_{\bar{n}}}$$

Für große t

Revivals der kollektiven Oszillationen mit Zeitskala

$$\tau_{\text{Revival}} = \frac{\bar{n}}{g} 2\pi = \frac{2\sqrt{\bar{n}+1}\bar{n}}{J_{\bar{n}}} 2\pi$$

C. J. Phys. Rev A 23, 236 (1981)