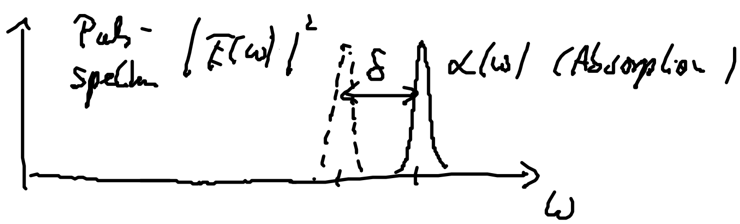
2. Kerreffekt

2.1. Selbstphasenmodulation

Kernichtlinearität $\tilde{P}_{nl} = i\alpha_K |\tilde{E}(\vec{r},t)|^2 \tilde{E}(\vec{r},t)$

- imaginär, 3. Ordng. in Feld, $\alpha_K > 0$ i.a.
- Nichtlinearität folgt dem Feld
- Ableitung im Kapitel zu schwach nicht-resonanten Nichtlinearitäten:



$$\tilde{P}_{nl} = n_0 d_{12} \tilde{\rho}_{12} \quad , \quad \tilde{\rho}_{12} = -\frac{1}{2\delta^3} |\tilde{\Omega}(r,t)|^2 \tilde{\Omega}(r,t)$$

(in VL abgeleitet)

zugehörige Wellengleichung:

$$\Big(\underbrace{\partial_\zeta}_{\substack{\text{Ausbreitg.}\\ \text{in z-Richtg.}\\ \text{mit } v_L}} + \underbrace{\frac{\Delta_\parallel}{2ik_L}}_{\text{Beugung}} + \underbrace{\frac{i}{2}k_L''\partial_\eta^2}_{\substack{\text{Gruppengeschw.-}\\ \text{Dispersion}}}\Big)\tilde{\Omega}(z,\vec{r}_\parallel,t) = \underbrace{i\frac{k_L\, n_0 |d_{12}|^2}{2n_L^2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\delta^3}\right)|\tilde{\Omega}|^2\tilde{\Omega}}$$

$$\equiv i k_L \underbrace{\frac{\Delta n}{n_L}}_{\substack{\text{relative Brechzahl-}\\ \text{änderung:}}} \tilde{\Omega}(z,\vec{r}_\parallel,t)$$

$$\Delta n \equiv n_2 \left|\tilde{E}(z,\vec{r}_\parallel,t)\right|^2$$

Koeffizient d. Kerrnichtlinearität

mit quadratischem E-Feld

Sinnhaftigkeit Δn-Interpretation zu zeigen

$\longrightarrow$ intensitätsabhängige Brechzahl

<u>zur Interpretation</u> $\Delta_\parallel,\ \partial_\eta^2 \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\tilde{\Omega} = ik_L\frac{\Delta n}{n_L}\tilde{\Omega}$$

wenn Δn nicht vom Ort ζ abhängt, so:

$$\tilde\Omega(\zeta,y) = \tilde\Omega(\zeta=0,y)\, e^{i k_L \frac{\Delta n}{n_L}\zeta}$$, volle Felder:

$$\Omega(\zeta,y) = \Omega(\zeta=0,y)\, e^{i k_L \frac{\Delta n}{n_L}\zeta}\, e^{i k_L \zeta}$$

$$\left(e^{-i\omega_L y} \right)$$

$$= \Omega(\zeta=0,y)\, e^{i k_L \left(1+\frac{\Delta n}{n_L}\right)\zeta} \qquad \zeta = z$$

$$= \Omega(z=0,y)\, \underbrace{e^{i \frac{\omega_L n_L}{c}\left(1+\frac{\Delta n}{n_L}\right)\zeta}}_{e^{i\frac{\omega_L}{c}(\underbrace{n_L+\Delta n})\zeta}}$$

n_L : Brechzahl wird durch

Δn den intensitätsabh. Brechungsindex

korrigiert

$$n_{neu} = n_L + n_2 |\tilde E|^2$$

Durch d. Kerreffekt wird Brechzahl d. Mediums proportional zu $|\tilde E|^2$ moduliert.

prinzipielle Diskussion z. Folge:

a) Δn ist wirklich ξ unabhängig:

$$\partial_\xi \tilde{\Omega} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \tilde{\Omega} \quad \Big| \cdot \tilde{\Omega}^*$$

$$\partial_\xi \tilde{\Omega}^* = -i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \tilde{\Omega}^* \quad \Big| \tilde{\Omega} \cdot$$

$$\Sigma: \quad \frac{\partial}{\partial \xi} |\tilde{\Omega}|^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{damit } |\tilde{\Omega}|^2 = |\tilde{\Omega}|^2(\xi=0, \vec{r}_\perp, y)$$

$$\left(\Delta n = n_2 |\tilde{E}|^2 \sim |\tilde{\Omega}|^2 \right)$$

Die Kerr NL verändert nicht die Amplitude über ξ.

b) gekoppelte Amplitude – Phasengleichung

$$\tilde{\Omega} = A e^{i\phi} \quad ; \; A, \phi \text{ reell},$$

$$\partial_\xi \tilde{\Omega} = i k_L \frac{\Delta n}{n_L} \tilde{\Omega}, \quad \text{einsetzen}$$

$$(\partial_\xi A) e^{i\phi} + i(\partial_\xi \phi) A e^{i\phi} = i k_L \frac{\Delta n (A^2)}{n_L} A e^{i\phi}$$

Realteil: $\partial_\xi A = 0$

Imaginärteil: $\partial_\zeta \phi = k_L \dfrac{\Delta n}{n_L}$

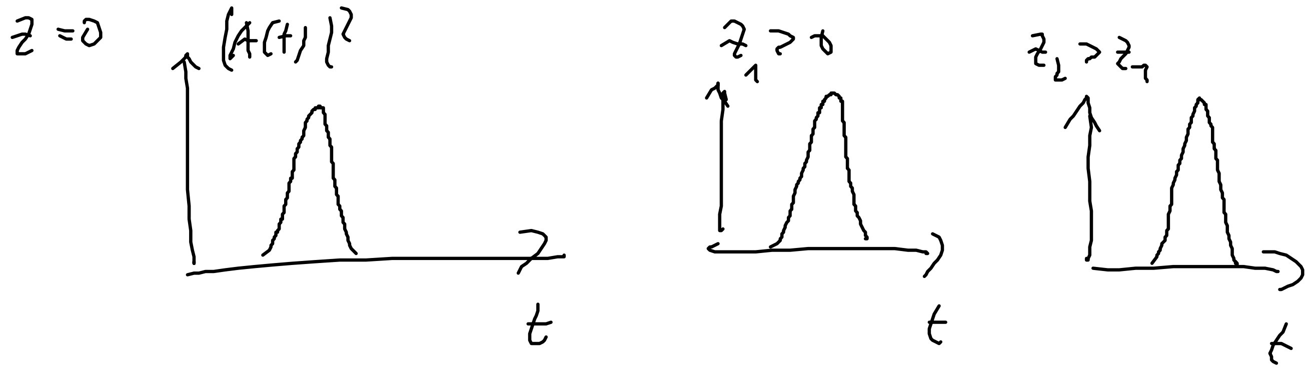
$$\Downarrow \quad \phi = \int_0^\zeta d\zeta' = k_L \frac{n_2 \left| \tilde{E}(\zeta=0, \vec{r}_\perp, \tau) \right|^2}{n_L}$$

$$= k_L \frac{n_2}{n_L} \left| \tilde{E}(\zeta=0, \vec{r}_\perp, \tau) \right|^2 \zeta$$

Das Licht moduliert während der Ausbreitung in ζ seine Phase durch die <u>eigene</u> Intensitätsverteilung $|\tilde{E}|^2$.

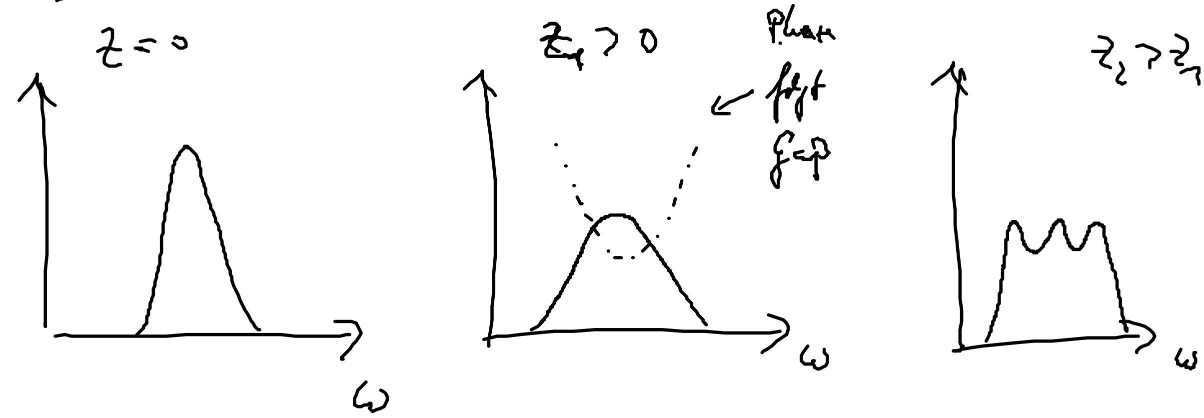
c/ spektrales und zeitl. Verhalten

<u>zeitlich</u> bleibt die Intensität konstant bei verschied. z:



zeitlich konstant

spektral



2.2. Selbstfokussierung

Strahl, stationär, $\partial_\tau^2 \to 0$, $\Delta_\perp \neq 0$: Beugg.!

$$\left(i2k_L\,\underline{\partial_\xi} + \underline{\underline{\Delta_\perp}}\right)\tilde{E} = -2k_L^2\,\frac{\Delta n}{n_L}\,\tilde{E}$$

$$\Delta n = n_2\,|\tilde{E}|^2$$

$\tilde{E} = A e^{i\phi}$ Ansatz, $\Delta_\perp = \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\nabla}_\perp$, trennen Re, Im:

$\downarrow$ $$\underline{\underline{k_L\,\partial_\xi A^2}} = -\vec{\nabla}_\perp \cdot \left(A^2\,\vec{\nabla}_\perp \phi\right)$$ Amplitudengleichung

$\Longrightarrow$ $$\underline{\underline{\partial_\xi \phi}} + \frac{1}{2k_L}\left(\vec{\nabla}_\perp \phi\right)^2 - \frac{k_L}{2}\left(\frac{\Delta_\perp A}{k_L^2 A} + 2\,\underline{\underline{\frac{\Delta n}{n_L}}}\right) = 0$$ Phasengleichung

$=$ „von oben", Rest ist Beugung

$\Longrightarrow$ ähnelt einer Hamilton-Jacobi Gleichung.

$$\partial_t S + H(\underbrace{\vec{\nabla}_q S}_{\vec{p}\,\hat{=}}, t) = 0$$

Wirkungsfunktion $\quad S \longleftrightarrow \phi$

Zeit $\quad t \longleftrightarrow z$

Teilchenbahn $\quad \vec{q} \longleftrightarrow \vec{r}_\perp$

Masse $\quad m \longleftrightarrow k_L$

Potential $\quad V \longleftrightarrow -\frac{k_L}{2}\left(\frac{\Delta_\perp A}{k_L^2 A} + 2\frac{\Delta n}{n_L}\right)$

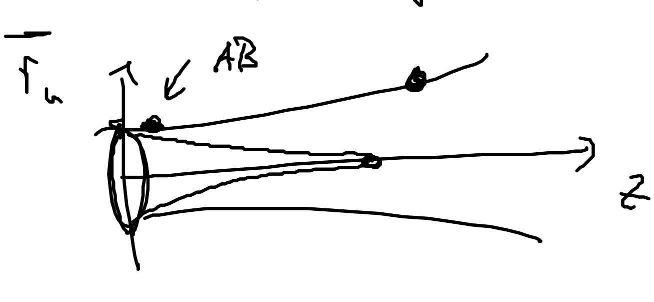
$\vec{r}_\perp = \vec{r}_\perp(z)$

$\vec{q} = \vec{q}(t)$

$$\boxed{\Rightarrow \underbrace{k_L}_{\hat{=}\, m} \frac{d^2 r_\perp}{d \underbrace{z}_{\hat{=}\, t}^2} = -\frac{\partial}{\partial r_\perp} V}$$

Bewegungsgleichung $\vec{r}_\perp = \vec{r}_\perp(z)$

$\hat{=}$ Strahlengleichung „Trajektorie"



Potential V enthält Beugung ($\Delta_\perp$) und Kerreffekt (Δn)

beide gemeinsam legen fest, wie sich Strahl bewegt.

→ viele Szenarien, greifen nur 1. heraus

Ansatz f. Selbstfokussierung

$A(z, r_\perp)$ zylindrische Abhängigkeiten

$$= A_0 \frac{a_0^2}{a^2(z)} e^{-\frac{r^2}{2a^2(z)}}$$

Konstante

- Gaußstrahl mit z-abhängiger Breite

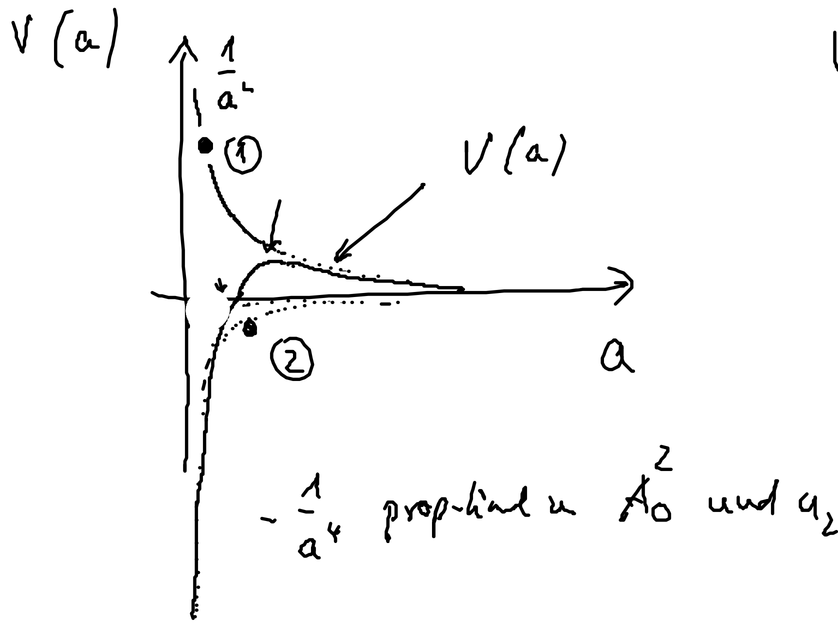
  wie verändert sich $a = a(z)$ mit zunehmendem z?
- einsetzen in V:

$$V = -K_L \left(-\frac{1}{k_L^2 a^2} + \frac{r^2}{2k^2 a^2} + \frac{\Delta n}{n_L} \right)$$

$$= -K_L \left(\underbrace{-\frac{1}{K_L^2 a^2}}_{①} + \frac{r^2}{2k^2 a^4} + \underbrace{\frac{n_2 A_0^2}{u_L}}_{②} \frac{a_0^4}{a^4} \right)$$

Sehe uns klein r an : $\frac{r^2}{2k^2a^4} \to 0$

und dann V als Funktion von V(a) diskutiere



V(a) realisiert die Bewegung

a(z) analog r(t)

① ohne Kerreffekt → Trajektorie so, daß $a \to \infty$

→ unendlich Defokussierung.

② ohne Beugung → Trajektorie so, daß $a \to 0$

→ unendliche Fokussierung

③ mit Kerr + Beugung $\exists$ beide Lösungen,

sind aber v. AB abhängig

beide Mgl. existieren,

inklusive instabiler Lösungen

$$\left(r = r_4 \right)$$