

## 6. Offene Quantensysteme, Quantenoptische Mastergleichungen

### 6.1 Zeitentwicklung der Dichtematrix in geschlossenen Quantensystemen

Dichtematrix für reinen Zustand

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$$

Liouville von-Neumann Gleichung

$$i\hbar \partial_t \rho(t) = [H(t), \rho(t)]$$

Dichtematrix für gemischten Zustand

$$\rho(t) = \sum_n p_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|$$

Anfangsbedingung bei  $t = t_0$

$$\rho(t_0) = \sum_n p_n |\psi_n(t_0)\rangle \langle \psi_n(t_0)|$$

Zeitentwicklung

$$\rho(t) = \sum_n p_n U(t, t_0) |\psi_n(t_0)\rangle \langle \psi_n(t_0)| U^\dagger(t, t_0)$$

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0)$$

ist Lösung der LNV Gleichung

Zeitentwicklungsoperator

$$U(t, t_0) = \hat{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(s) ds\right)$$

↑ "time-ordered" Operator

### 6.2 Offene Quantensysteme

Hamiltonian für System + Bad

$$H = \underbrace{H_S \otimes \mathbb{1}_B}_{\text{System}} + \underbrace{\mathbb{1}_S \otimes H_B}_{\text{Bad}} + \underbrace{\lambda H_{SB}}_{\text{System-Bad Kopplung}}$$

Bsp.:      2-level Atom      freies EM-Feld      Dipol-Kopplung

$$\begin{aligned} H_S |\phi_j\rangle &= E_j |\phi_j\rangle & |\phi_j\rangle &\in \mathcal{H}_S \\ H_B |\chi_j\rangle &= E_j |\chi_j\rangle & |\chi_j\rangle &\in \mathcal{H}_B \\ \text{Basis für Gesamtzustand} \\ |\Psi_{ij}\rangle &= |\phi_j\rangle \otimes |\chi_i\rangle & \chi_{i,j} & \\ & & \chi &= (i,j) \end{aligned}$$



kopplungs-Hamiltonian im W-Bild

$$H_{SB, I}(t) = e^{i(H_S + H_B)t} H_{SB} e^{-i(H_S + H_B)t}$$

↑  
"interaction picture"

$H_{SB}$  koppelt S, B  
Austausch von  
Impuls, Energie  
(Teilchen)

Unitäre Zeitentwicklung des geschlossenen Systems aus System + Bad  
im W-Bild

$$\partial_t \rho_I(t) = -\frac{i}{\hbar} \cdot \lambda [H_{SB, I}(t), \rho_I(t)] \quad (1)$$

Formale Lösung von Gl. (1)

$$\rho_I(t) = \rho(0) - \frac{i}{\hbar} \lambda \int_0^t [H_{SB, I}(s), \rho_I(s)] ds \quad (2)$$

(Verifikation durch Einsetzen)

Einsetzen von Gl. (2) in (1)

$$\partial_t \rho_I(t) = -\frac{i}{\hbar} \lambda [H_{SB, I}(t), \rho(0)] - \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^t [H_{SB, I}(s), [H_{SB, I}(s), \rho_I(s)]] ds$$

"Aussparzen" der Bad-Freiheitsgrade

$$\rho_{S, I}(t) \equiv \text{tr}_B(\rho_I(t)) = \sum_j \langle \chi_j | \rho_I(t) | \chi_j \rangle_B$$

$$\begin{aligned} \partial_t \text{tr}_B(\rho_I(t)) &= \partial_t \rho_{S, I}(t) = -\frac{i}{\hbar} \lambda \text{tr}_B \left\{ [H_{SB, I}(t), \rho(0)] \right\} \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_B \left\{ [H_{SB, I}(s), [H_{SB, I}(s), \rho_I(s)]] \right\} ds \end{aligned}$$

Folgende Annahmen werden gemacht

- keine Korrelation zwischen System + Bad am Zeitpunkt  $t=0$  ( $H_{SB}$  wird erst bei  $t=0$  eingeschaltet)

$$\leadsto \rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0)$$

- Der erste Term (\*) kann identisch Null gemacht werden

$$\text{tr}_B [H_{SB, I}(t), \rho(0)] = 0$$

haben durch Substitution von  $\text{tr}_B [H_{SB,I}(t), \rho_B]$  von  $H_{SB,I}$  und Addition zum System-Hamiltonian  $H_{S,I}$  erreicht werden  
keine Näherung

- Born'sche Näherung: Annahme, daß die Dichtoperatoren zu allen Zeiten faktorisierbar

$$\rho_{S,I}(t) = \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B + \lambda \rho_S \quad |$$

wobei zusätzlich angenommen wird, daß  $\rho_B = \rho_B(0)$   
 Setzt schwache Kopplung, sowie eine vernachlässigbare Wirkung des Bades auf das System voraus

Mit diesen Annahmen vereinfacht sich die Dichtengleichung zu

$$\partial_t \rho_{S,I}(t) = -\frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_B \left[ H_{SB,I}(t), \left[ H_{SB,I}(s), \rho_{S,I}(s) \otimes \rho_B(0) \right] \right] ds$$

Markov-Näherung

$\rho_{S,I}(s) \rightarrow \rho_{S,I}(t)$  zukünftige Entwicklung von  $\rho_{S,I}(t)$   
 hängt nur vom aktuellen Zustand zur Zeit  $t = s$

Substitution

$$s \rightarrow t - \tau$$

Integrationslimit kann auf  $t \rightarrow \infty$  gesetzt werden was durch die unterschiedlichen Zeitskalen im System und Umgebung gerechtfertigt ist.

$$\partial_t \rho_{S,I}(t) = -\frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^\infty \text{tr}_B \left[ H_{SB,I}(t), \left[ H_{SB,I}(t-\tau), \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(0) \right] \right] d\tau \quad (3)$$

Mark-Gliederung in Born-Markov Limit

### 6.3 Bad-Korrelationsfunktionen

Kopplungs-Hamiltonian

$$H_{SB} = \sum_d S_d \otimes B_d \quad \text{"s: lineare Kopplung"}$$

Wiederholungsgesetz

$$H_{S,B,I}(t) = \sum_k S_{k,I}(t) \otimes B_{k,I}(t)$$

wobei

$$S_{k,I}(t) = e^{+iH_S t} S_k e^{-iH_S t}$$

$$B_{k,I}(t) = e^{+iH_B t} B_k e^{-iH_B t}$$

Einsatz in Gl. (3)

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{S,I}(t) = & -\frac{\lambda^2}{\epsilon^2} \sum_{\alpha,\beta} \int_0^t \text{tr}_B \left[ S_{\alpha,I}(t) \otimes B_{\alpha,I}(t) \cdot S_{\beta,I}(t-\tau) \otimes B_{\beta,I}(t-\tau) \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(\cdot) \right. \\ & - S_{\alpha,I}(t-\tau) \otimes B_{\alpha,I}(t-\tau) \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(0) S_{\beta,I}(t) \otimes B_{\beta,I}(t) \\ & - S_{\alpha,I}(t) \otimes B_{\alpha,I}(t) \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(\cdot) S_{\beta,I}(t-\tau) \otimes B_{\beta,I}(t-\tau) \\ & \left. + \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(0) S_{\alpha,I}(t-\tau) \otimes B_{\alpha,I}(t-\tau) S_{\beta,I}(t) \otimes B_{\beta,I}(t) \right] d\tau \end{aligned}$$

Definition der Bad-Korrelationsfunktion

$$C_{\alpha\beta}(t,s) = \langle B_\alpha(t) B_\beta(s) \rangle_B = \text{tr}_B ( B_\alpha(t) B_\beta(s) \rho_B )$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_{S,I}(t) = & -\frac{\lambda^2}{\epsilon^2} \sum_{\alpha,\beta} \int_0^t C_{\alpha\beta}(t,t-\tau) \left[ S_{\alpha,I}(t), S_{\beta,I}(t-\tau) \rho_{S,I}(t) \right] \\ & + \left[ \rho_{S,I}(t) S_{\beta,I}(t-\tau), S_{\alpha,I}(t) \right] \cdot C_{\beta\alpha}(t-\tau,t) \end{aligned}$$

Für ein stationäres Bad (z.B. thermisches Gleichgewicht) gilt:

$$[H_B, \rho_B] = 0 \quad \rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{\text{tr}(e^{-\beta H_B})}$$

$$C_{\alpha\beta}(t,s) = \text{tr}_B ( B_\alpha(t-s) B_\beta \rho_B ) = C_{\alpha\beta}(t-s)$$

↑ hängt nur von Zeitdifferenz ab

Transformieren wir uns in das Schrodinger-Bild

$$\partial_t \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S(t)] - \sum_{\alpha, \beta} \int_0^{\infty} \left[ S_{\alpha}, S_{\beta}(-\tau) \rho_S(t) \right] C_{\alpha\beta}(\tau) + \left[ \rho_S(t) S_{\beta}(-\tau), S_{\alpha} \right] C_{\beta\alpha}(-\tau) d\tau \quad (47)$$

6.4. Annäherung des Wigner-Weisskopf Modells

$$H = H_S + H_B + H_{SB}$$

$$H_S = \frac{\epsilon}{2} \sigma_z = \frac{\epsilon}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \quad (\text{2-Niveau System})$$

$$H_B = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k \quad (\text{freie EM-F.U.})$$

$$H_{SB} = \sum_k g_k \sigma_+ b_k + g_k^* \sigma_- b_k^\dagger \quad (\text{Dip.-Kopplg.})$$

Kopplungs-Hamiltonian in Wigner-Bild

$$H_{SB, I}(t) = \sum_k g_k \sigma_+ e^{i\epsilon t} b_k e^{-i\omega_k t} + g_k^* \sigma_- e^{-i\epsilon t} b_k^\dagger e^{+i\omega_k t}$$

System und Bath-Operatoren

$$S_1(t) = \sigma_+ e^{i\epsilon t} = |e\rangle\langle g| e^{i\epsilon t}$$

$$S_2(t) = \sigma_- e^{-i\epsilon t} = |g\rangle\langle e| e^{-i\epsilon t}$$

$$B_1(t) = \sum_k g_k b_k e^{-i\omega_k t}$$

$$B_2(t) = \sum_k g_k^* b_k^\dagger e^{+i\omega_k t}$$

$$H_{SB, I}(t) = S_1(t) \cdot B_1(t) + S_2(t) \cdot B_2(t)$$

Thermische Dichtematrix

$$\rho_B = \frac{e^{-H_B/kT}}{\text{tr}(e^{-H_B/kT})}$$

$$\langle b_k b_{k'} \rangle_B = \text{tr}_B (b_k b_{k'} \rho_B) = 0 \quad (5)$$

$$\langle b_k^+ b_{k'}^+ \rangle_B = \text{tr}_B (b_k^+ b_{k'}^+ \rho_B) = 0 \quad (6)$$

$$\langle b_k b_{k'}^+ \rangle_B = \text{tr}_B (b_k b_{k'}^+ \rho_B) = \delta_{kk'} (1 + N(\omega_k)) \quad (7)$$

$$\langle b_k^+ b_{k'} \rangle_B = \text{tr}_B (b_k^+ b_{k'} \rho_B) = \delta_{kk'} \cdot N(\omega_k) \quad (8)$$

Wobei

$$N(\omega) = \frac{1}{e^{\omega/kT} - 1} \quad \text{Bose-Einstein Besetzungszahl} \quad (9)$$

Aus Gl. (5) und (6) folgt

$$C_{11}(\tau) = \text{tr}_B (B_1(\tau) B_1 \rho_B) = 0$$

$$C_{22}(\tau) = \text{tr}_B (B_2(\tau) B_2 \rho_B) = 0$$

Mit Gl. (7), (8), (9) ergibt sich

$$\begin{aligned} C_{12}(\tau) &= \sum_{kk'} g_k g_{k'}^+ e^{-i\omega_k \tau} \langle b_k b_{k'}^+ \rangle_B \\ &= \sum_k |g_k|^2 e^{-i\omega_k \tau} (1 + N(\omega_k)) \end{aligned}$$

analog

$$C_{21}(\tau) = \sum_k |g_k|^2 e^{+i\omega_k \tau} \cdot N(\omega_k)$$

Umschreiben der Summe über  $k$  als Integral

$$C_{12}(\tau) = \int_0^{\omega_0} J(\omega) e^{-i\omega \tau} (1 + N(\omega)) d\omega$$

$$C_{21}(\tau) = \int_0^{\omega_0} J(\omega) e^{+i\omega \tau} N(\omega) d\omega$$

Definition der spektralen Dichte

$$J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$$

Einsetzen in Mastergleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_S(t) = & -\frac{i\varepsilon}{2} [\sigma_z, \rho_S(t)] - \int_0^\infty ( [\sigma_+, \rho_S(t)] e^{i\varepsilon\tau} c_{12}(\tau) \\ & + [\rho_S \sigma_-, \sigma_+] e^{i\varepsilon\tau} c_{21}(\tau) \\ & + [\sigma_-, \sigma_+ \rho_S(t)] e^{-i\varepsilon\tau} c_{12}(\tau) \\ & + [\rho_S(t) \sigma_+, \sigma_-] e^{-i\varepsilon\tau} c_{21}(\tau) ) d\tau \end{aligned}$$

Ausführen der Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\varepsilon\tau} c_{12}(\tau) d\tau &= \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\omega e^{i(\varepsilon-\omega)\tau} J(\omega) (1+N(\omega)) \\ &= \pi J(\varepsilon) (1+N(\varepsilon)) + i(\Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon)) \end{aligned}$$

wobei folgende Relationen verwendet werden

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\pm i\varepsilon t} dt &= \pi \delta(\varepsilon) \pm i \frac{P}{\varepsilon} \\ \Delta_1(\varepsilon) &= P \int_0^\infty \frac{J(\omega)}{\varepsilon - \omega} d\omega \\ \Delta_2(\varepsilon) &= P \int_0^\infty \frac{J(\omega) \cdot N(\omega)}{\varepsilon - \omega} d\omega \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{i\varepsilon\tau} c_{21}(\tau) d\tau = \pi J(\varepsilon) N(\varepsilon) + i\Delta_2(\varepsilon)$$

Einsetzen in die Master-Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_S(t) = & -i \frac{\varepsilon'}{2} [\sigma_z, \rho_S] \\ & + g(\varepsilon) (N(\varepsilon) + 1) (2\sigma_- \rho_S \sigma_+ - \{ \sigma_+ \sigma_-, \rho_S \}) \\ & + g(\varepsilon) N(\varepsilon) (2\sigma_+ \rho_S \sigma_- - \{ \sigma_- \sigma_+, \rho_S \}) \end{aligned}$$

Anti-  
kommutator

$$\varepsilon' = \varepsilon + \Delta_1(\varepsilon) + 2\Delta_2(\varepsilon)$$

Quantenoptische Mastergleichung  
für zwei-Niveau-System.

Landschaft

$$f^2(\epsilon) = \pi \bar{J}(\epsilon)$$