6. Offene Quantensysteme, Quantenoptische Mastergleichungen

6.1 Zeitentwicklung der Dichtematrix im geschlossenen Quantensystem

Dichtematrix für reinen Zustand

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$$

Liouville von-Neumann Gleichung

$$i\hbar\,\partial_t \rho(t) = [H(t), \rho(t)]$$

Dichtematrix für gemischten Zustand

$$\rho(t) = \sum_n p_n\, |\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)|$$

Anfangsbedingung bei $t = t_0$

$$\rho(t_0) = \sum_n p_n\, |\psi_n(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)|$$

Zeitentwicklung

$$\rho(t) = \sum_n p_n\, U(t,t_0)\,|\psi_n(t_0)\rangle\langle\psi_n(t)|\,U^\dagger(t,t_0)$$

$$\rho(t) = U(t,t_0)\,\rho(t_0)\,U^\dagger(t,t_0)$$

ist Lösung der LvN Gleichung

Zeitentwicklungsoperator

$$U(t,t_0) = \hat{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(s)\,ds\right)$$

"time-ordering" Operator

6.2 Offene Quantensysteme

Hamiltonian für System + Bad

$$H = \underbrace{H_S \otimes \mathbb{1}_B}_{\text{System}} + \underbrace{\mathbb{1}_S \otimes H_B}_{\text{Bad}} + \underbrace{\lambda H_{SB}}_{\text{System-Bad Kopplung}}$$

Bsp.: 2-level Atom | freies EM-Feld | Dipolkopplung

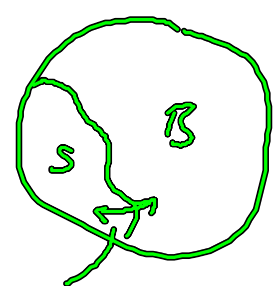
$H_S|\phi_j\rangle = \epsilon_j|\phi_j\rangle \qquad |\phi_j\rangle \in \mathcal{H}_S$

$H_B|\chi_j\rangle = E_j|\chi_j\rangle \qquad |\chi_j\rangle \in \mathcal{H}_B$

B wie für Gesamtraum

$|\psi_q\rangle = |\phi_j\rangle \otimes |\chi_i\rangle \qquad \forall\, i,j$

$q = (i,j)$



Kopplungs-Hamiltonian im WW-Bild

$$H_{SB,I}(t) = e^{i(H_S+H_B)t} H_{SB} e^{-i(H_S+H_B)t}$$

"interaction picture"

H_{SB} koppelt S, B
Austausch von Impuls, Energie (Teilchen)

Unitäre Zeitentwicklung des geschlossenen Systems aus System + Bad im WW-Bild

$$\partial_t \rho_I(t) = -\frac{i}{\hbar} \cdot \lambda \left[H_{SB,I}(t), \rho_I(t) \right] \qquad (1)$$

Formale Lösung von Gl. (1)

$$\rho_I(t) = \rho(0) - \frac{i}{\hbar} \lambda \int_0^t \left[H_{SB,I}(s), \rho_I(s) \right] ds \qquad (2)$$

(Verifikation durch Einsetzen)

Einsetzen von Gl. (2) in (1)

$$\partial_t \rho_I(t) = -\frac{i}{\hbar} \lambda \left[H_{SB,I}(t), \rho(0) \right] - \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^t \left[H_{SB,I}(t), \left[H_{SB,I}(s), \rho_I(s) \right] \right] ds$$

„Ausspuren" der Bad-Freiheitsgrade

$$\rho_{S,I}(t) \equiv tr_B\left(\rho_I(t)\right) = \sum_j {}_B\langle \chi_j | \rho_I(t) | \chi_j \rangle_B$$

$$\partial_t tr_B(\rho_I(t)) = \partial_t \rho_{S,I}(t) = -\frac{i}{\hbar} \lambda\, tr_B \overset{(*)}{\left\{ \left[H_{SB,I}(t), \rho(0) \right] \right\}} - \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^t tr_B \left\{ \left[H_{SB,I}(t), \left[H_{SB,I}(s), \rho_I(s) \right] \right] \right\} ds$$

Folgende Annahmen werden gemacht

- keine Korrelation zwischen System + Bad am Zeitpunkt $t=0$ (H_{SB} wird erst bei $t=0$ eingeschaltet)

$$\rightsquigarrow \quad \rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B(0)$$

- Der erste Term (*) kann identisch Null gewählt werden

$$tr_B \left[H_{SB,I}(t), \rho(0) \right] = 0$$

kann durch Subtraktion von $\mathrm{tr}_B[H_{SB,I}(t), \rho(0)]$ von $H_{SB,I}$ und Addition zum System-Hamiltonian $H_{S,I}$ erreicht werden

keine Näherung

- Born'sche Näherung: Annahme, daß der Dichteoperator zu allen Zeiten faktorisiert

$$\rho_I(t) = \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B + \lambda\, \delta_\rho \quad ,$$

wobei zusätzlich angenommen wird, daß $\rho_B = \rho_B(0)$

Setzt schwache Kopplung, sowie eine vernachlässigbare Wirkung des Bads auf das System voraus

Mit diesen Annahmen vereinfacht sich die Dichtematrixgleichung zu

$$\partial_t \rho_{S,I}(t) = -\frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^t \mathrm{tr}_B \left[H_{SB,I}(t), \left[H_{SB,I}(s), \rho_{S,I}(s) \otimes \rho_B(0) \right]\right] ds$$

Markov-Näherung

$$\rho_{S,I}(s) \to \rho_{S,I}(t)$$

zukünftige Entwicklung von $\rho_{S,I}(t)$ hängt nur vom aktuellen Zustand zur Zeit t ab

Substitution

$$s \to t - \tau$$

Integrationslimit kann auf $+\infty$ gesetzt werden was durch die unterschiedlichen Zeitskalen in System und Umgebung gerechtfertigt ist.

$$\boxed{\partial_t \rho_{S,I}(t) = -\frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^\infty \mathrm{tr}_B \left[H_{SB,I}(t), \left[H_{SB,I}(t-\tau), \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(0) \right]\right] d\tau} \quad (8)$$

Mastergleichung in Born-Markov Limit

6.3 Bad-Korrelationsfunktionen

Kopplungshamiltonian

$$H_{SB} = \sum_\alpha S_\alpha \otimes B_\alpha \qquad \text{„bilineare Kopplung"}$$

Wechselwirkungsbild

$$H_{SB,I}(t) = \sum_\alpha S_{\alpha,I}(t) \otimes B_{\alpha,I}(t)$$

wobei
$$S_{\alpha,I}(t) = e^{+iH_S t} S_\alpha e^{-iH_S t}$$
$$B_{\alpha,I}(t) = e^{+iH_B t} B_\alpha e^{-iH_B t}$$

Einsetzen in Gl. (3)

$$\partial_t \rho_{S,I}(t) = -\frac{\lambda^2}{\hbar^2} \sum_{\alpha,\beta} \int_0^\infty \mathrm{tr}_B \Big[S_{\alpha,I}(t) \otimes B_{\alpha,I}(t) \cdot S_{\beta,I}(t-\tau) \otimes B_{\beta,I}(t-\tau)\, \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(0)$$
$$- S_{\alpha,I}(t-\tau) \otimes B_{\alpha,I}(t-\tau)\, \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(0)\, S_{\beta,I}(t) \otimes B_{\beta,I}(t)$$
$$- S_{\alpha,I}(t) \otimes B_{\alpha,I}(t)\, \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(0)\, S_{\beta,I}(t-\tau) \otimes B_{\beta,I}(t-\tau)$$
$$+ \rho_{S,I}(t) \otimes \rho_B(0)\, S_{\alpha,I}(t-\tau) \otimes B_{\alpha,I}(t-\tau)\, S_{\beta,I}(t) \otimes B_{\beta,I}(t) \Big] d\tau$$

Definition der Bad-Korrelationsfunktion

$$C_{\alpha\beta}(t,s) = \langle B_\alpha(t) B_\beta(s) \rangle_B = \mathrm{tr}_B\big(B_\alpha(t) B_\beta(s) \rho_B \big)$$

$$\partial_t \rho_{S,I}(t) = -\frac{\lambda^2}{\hbar^2} \sum_{\alpha,\beta} \int_0^\infty C_{\alpha\beta}(t, t-\tau) \big[S_{\alpha,I}(t), S_{\beta,I}(t-\tau) \rho_{S,I}(t) \big]$$
$$+ \big[\rho_{S,I}(t) S_{\beta,I}(t-\tau), S_{\alpha,I}(t) \big] \cdot C_{\beta\alpha}(t-\tau, t)$$

Für ein stationäres Bad (z.B. termisches Gleichgewicht) gilt:

$$[H_B, \rho_B] = 0 \qquad \rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{\mathrm{tr}(e^{-\beta H_B})}$$

$$C_{\alpha\beta}(t,s) = \mathrm{tr}_B\big(B_\alpha(t-s) B_\beta \rho_B \big) = C_{\alpha\beta}(t-s)$$

hängt nur von Zeitdifferenz ab

Transformation zurück ins Schrödinger-Bild

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t \rho_S(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho_S(t)] - \sum_{\alpha,\beta} \lambda^2 \int_0^\infty & [S_\alpha, S_\beta(-\tau)\rho_S(t)]\, C_{\alpha\beta}(\tau) \\ & + [\rho_S(t) S_\beta(-\tau), S_\alpha]\, C_{\beta\alpha}(-\tau)\, d\tau\end{aligned}} \quad (47)$$

6.4. Anwendung auf Wigner-Weisskopf Modell

$$H = H_S + H_B + H_{SB}$$

$$H_S = \frac{\varepsilon}{2}\sigma_z = \frac{\varepsilon}{2}\left(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right) \qquad \text{(2-level System)}$$

$$H_B = \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k \qquad \text{(freies Em-Feld)}$$

$$H_{SB} = \sum_k g_k \sigma_+ b_k + g_k^* \sigma_- b_k^\dagger \qquad \text{(Dipolkopplung)}$$

Kopplungs-Hamiltonian im WW-Bild

$$H_{SB,I}(t) = \sum_k g_k \sigma_+ e^{i\varepsilon t} b_k e^{-i\omega_k t} + g_k^* \sigma_- e^{-i\varepsilon t} b_k^\dagger e^{+i\omega_k t}$$

System und Bad-Operatoren

$$S_1(t) = \sigma_+ e^{i\varepsilon t} = |e\rangle\langle g|\, e^{i\varepsilon t}$$

$$S_2(t) = \sigma_- e^{-i\varepsilon t} = |g\rangle\langle e|\, e^{-i\varepsilon t}$$

$$B_1(t) = \sum_k g_k b_k e^{-i\omega_k t}$$

$$B_2(t) = \sum_k g_k^* b_k^\dagger e^{+i\omega_k t}$$

$$H_{SB,I}(t) = S_1(t)\cdot B_1(t) + S_2(t)\cdot B_2(t)$$

Thermische Dichtematrix

$$\rho_B = \frac{e^{-H_B/kT}}{\mathrm{tr}\left(e^{-H_B/kT}\right)}$$

$$\langle b_k b_{k'} \rangle_B = \mathrm{tr}_B\left(b_k b_{k'} \rho_B\right) = 0 \qquad (5)$$

$$\langle b_k^+ b_{k'}^+ \rangle_B = \mathrm{tr}_B\left(b_k^+ b_{k'}^+ \rho_B\right) = 0 \qquad (6)$$

$$\langle b_k b_{k'}^+ \rangle_B = \mathrm{tr}_B\left(b_k b_{k'}^+ \rho_B\right) = \delta_{kk'}\left(1 + N(\omega_{k'})\right) \qquad (7)$$

$$\langle b_k^+ b_{k'} \rangle_B = \mathrm{tr}_B\left(b_k^+ b_k \rho_B\right) = \delta_{kk'} \cdot N(\omega_k) \qquad (8)$$

wobei

$$N(\omega) = \frac{1}{e^{\omega/kT} - 1} \qquad \text{Bose-Einstein Besetzungszahl} \qquad (9)$$

Aus Gl. (5) und (6) folgt

$$C_{11}(\tau) = \mathrm{tr}_B\left(B_1(\tau) B_1 \rho_B\right) = 0$$

$$C_{22}(\tau) = \mathrm{tr}_B\left(B_2(\tau) B_2 \rho_B\right) = 0$$

Mit Gl. (7), (8), (9) ergibt sich

$$C_{12}(\tau) = \sum_{kk'} g_k g_{k'}^* e^{-i\omega_k \tau} \langle b_k b_{k'}^+ \rangle_B$$

$$= \sum_k |g_k|^2 e^{-i\omega_k \tau}\left(1 + N(\omega_k)\right)$$

analog

$$C_{21}(\tau) = \sum_k |g_k|^2 e^{+i\omega_k \tau} \cdot N(\omega_k)$$

Umschreiben der Summe über Moden in Integral

$$C_{12}(\tau) = \int_0^\infty J(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\left(1 + N(\omega)\right) d\omega$$

$$C_{21}(\tau) = \int_0^\infty J(\omega)\, e^{+i\omega\tau} N(\omega)\, d\omega$$

Definition der spektralen Dichte

$$J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$$

Einsetzen in Mastergleichung

$$\partial_t \rho_S(t) = -\frac{i\varepsilon}{2}\left[\sigma_z, \rho_S(t)\right] - \int_0^\infty \Big(\left[\sigma_+, \sigma_- \rho_S(t)\right] e^{i\varepsilon\tau} c_{12}(\tau)$$
$$+ \left[\rho_S \sigma_-, \sigma_+\right] e^{i\varepsilon\tau} c_{21}(-\tau)$$
$$+ \left[\sigma_-, \sigma_+ \rho_S(t)\right] e^{-i\varepsilon\tau} c_{21}(\tau)$$
$$+ \left[\rho_S(t)\sigma_+, \sigma_-\right] e^{-i\varepsilon\tau} c_{12}(-\tau) \Big) d\tau$$

Ausführen der Integration

$$\int_0^\infty e^{i\varepsilon\tau} c_{12}(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\omega\, e^{i(\varepsilon-\omega)\tau} J(\omega)\left(1+N(\omega)\right)$$

$$= \pi J(\varepsilon)\left(1+N(\varepsilon)\right) + i\left(\Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon)\right)$$

wobei folgende Relationen verwendet wurden

$$\int_0^\infty e^{\pm i\varepsilon t}\, dt = \pi\delta(\varepsilon) \pm i\frac{P}{\varepsilon}$$

$$\Delta_1(\varepsilon) = P\int_0^\infty \frac{J(\omega)}{\varepsilon-\omega}\, d\omega$$

$$\Delta_2(\varepsilon) = P\int_0^\infty \frac{J(\omega)\cdot N(\omega)}{\varepsilon-\omega}\, d\omega$$

Analog ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{i\varepsilon\tau} c_{21}(-\tau)\, d\tau = \pi J(\varepsilon) N(\varepsilon) + i\Delta_2(\varepsilon)$$

Einsetzen in die Mastergleichung

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t \rho_S(t) = {} & -i\frac{\varepsilon'}{2}\left[\sigma_z, \rho_S\right] \\ & + \gamma(\varepsilon)\left(N(\varepsilon)+1\right)\left(2\sigma_- \rho_S \sigma_+ - \{\sigma_+\sigma_-, \rho_S\}\right) \\ & + \gamma(\varepsilon) N(\varepsilon) \left(2\sigma_+ \rho_S \sigma_- - \{\sigma_-\sigma_+, \rho_S\}\right)\end{aligned}}$$

Antikommutator

Quantenoptische Mastergleichung für Zwei-Niveau System.

$$\varepsilon' = \varepsilon + \underbrace{\Delta_1(\varepsilon) + 2\Delta_2(\varepsilon)}$$

Lamb shift

$$\gamma^R(\varepsilon) = \pi J(\varepsilon)$$