2.3. Kerreffekt und Solitonenlösungen in Fasern

Wellengleichung f. Amplituden $\tilde{E}(z, \vec{r}_\perp, t) \to \tilde{E}(\xi, \vec{r}_\parallel, \eta)$

$$\Big(\partial_\xi \underbrace{\cancel{+ \frac{\Delta_\perp}{2ik_L}}}_{\substack{\text{Beugung} \\ \text{(letztes Kapitel)}}} + \underbrace{\frac{i}{2} k_L'' \partial_\eta^2}_{\text{Dispersion}}\Big) \tilde{E} = \underbrace{i \alpha_K |\tilde{E}|^2 \tilde{E}}$$

α_K : Kerrkoeffizient, Kerr-NL

jetzt weglassen: ebene Welle oder 1modige Faser : $\Delta_\perp \to 0$

$$\Big(\partial_\xi + \frac{i}{2} k_L'' \partial_\eta^2\Big) \tilde{E} = \alpha_K |\tilde{E}|^2 \tilde{E}$$

„nichtlineare Schrödingergleichung"

Entsprechung f. Schrödingergleichung:

$\xi \to t \quad , \quad \eta \to x \quad , \quad \tilde{E} \to \psi(x,t)$

Nichtlinearität: $|\tilde{E}|^2 \tilde{E} \to |\psi|^2 \psi$

dimensionslos machen:

$$q = \frac{\tilde{E}}{\tilde{E}_0} \quad , \quad \eta \to \eta/\eta_0 \quad , \quad \underline{\underline{\xi \to \xi/\xi_0}}$$

$$\xi_0^{-1} = \alpha_K |\tilde{E}_0|^2 , \qquad y_0 = \Big[\xi_0 \underbrace{(-k_L'')}\Big]^{1/2}$$

im allgemeinen: $\underline{\underline{k_L'' < 0}}$

$$\underbrace{\alpha_K \xi_0 |\tilde{E}_0|^2}_{1} \, \underbrace{\frac{|\tilde{E}|^2}{|\tilde{E}_0|}}_{q^2}$$

$$\Big(\cancel{\frac{1}{\xi_0}} \, \partial_{\xi/\xi_0} + \frac{i}{2} \xi_0 k_L'' \frac{1}{y_0^2} \partial^2_{y/y_0} \Big) \tilde{E} = \underbrace{i \alpha_K |\tilde{E}|^2 \xi_0}_{q^2} \tilde{E} \qquad \Big| \cdot \xi_0$$

$$\underbrace{\Big(\partial_\xi - \frac{i}{2} \partial_y^2 \Big)}_{\text{dimensionslos } y,\, \xi} \tilde{E} = |q|^2 \tilde{E} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{\tilde{E}_0}$$

dimensionslose nl. Schrödingergleichung:

$$\boxed{\Big(\partial_\xi - \frac{i}{2} \partial_y^2 \Big) q = i |q|^2 q}$$

Bemerkungen:

a) wenn noch komplexe Koeffizienten auftauchen:

„Ginzburg-Landau" Gleichung

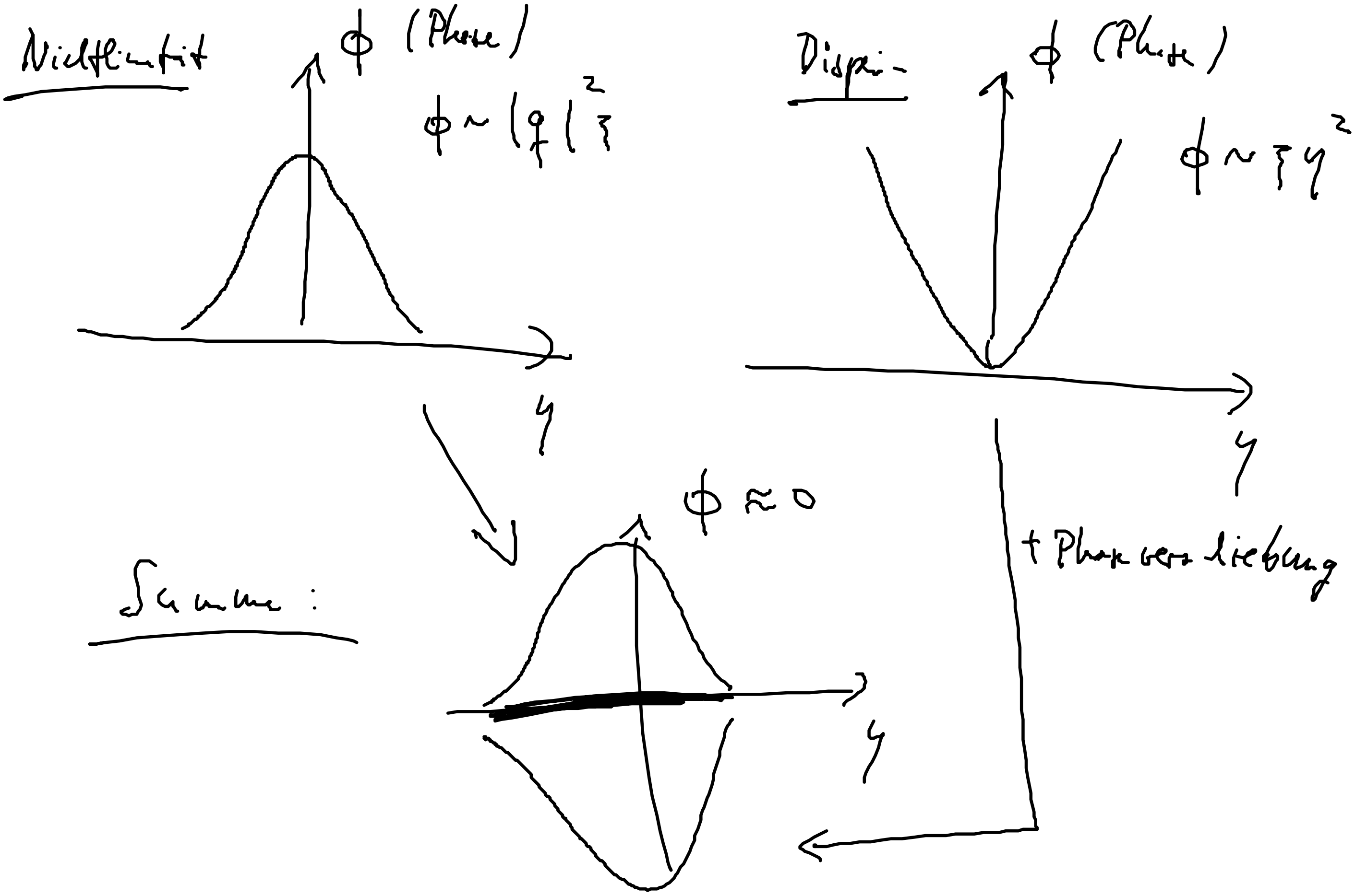
→ Phasenübergänge

b/ Mgl. eines Solitons:

Kompensation von NL und Dispersion

„gäbe" eine Lösung $f(\eta)$

gilt nur f. bestimmte Wellenform $f(\eta)$



Dispersion und NL können sich gegenseitig zu Null kompensieren.

analog Vakuum

$$\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

Ansatz f. Soliton:

ist inverse Geschwindigkeit

$$q(\xi,\eta) = A(\eta - v_s \xi) \cdot e^{i\phi\xi + i\psi\eta}$$

ϕ, ψ = Konstanten, werden geschickt gewählt.

Einsetzen in nl. Schrödingergleichung:

$$\left(i\partial_\xi + \frac{1}{2}\partial_\eta^2\right) q + |q|^2 q = 0$$

$$i\partial_\xi A - \phi A + \frac{1}{2}\partial_\eta^2 A + i\psi\partial_\eta A - \frac{1}{2}\psi^2 A + A^3 = 0$$

(i) wähle $\psi = v_s$, dann $\partial_\xi A = \partial_\eta A\,(-v_s)$

$$\to \; \sim\sim = 0$$

(ii) fasse $\phi + \frac{1}{2}\psi^2 = \phi + \frac{1}{2}v_s^2 = B_0 = \text{konst.}$

$$(\; - - - - \;)$$

um Erhaltungssatz zu bekommen:

$$\downarrow \quad \left(\frac{1}{2}\partial_y^2 - B_0\right) A + A^3 = 0 \qquad \Big| \, \partial_y A$$

$$\frac{1}{2}\partial_y A \, \partial_y^2 A = B_0 A \partial_y A - A^3 \partial_y A$$

$$\frac{1}{4}\underline{\underline{\partial_y}}\left(\left(\partial_y A\right)^2\right) = \frac{1}{2} B_0 \, \underline{\underline{\partial_y}}\left(A^2\right) - \frac{1}{4}\underline{\underline{\partial_y}} A^4$$

$$\text{Form } \partial_y \underbrace{(\quad)}_{\text{konst bzgl. } y \,\equiv\, C_0} = 0$$

$$\left(\partial_y A\right)^2 = 2B_0 A^2 - A^4 + C_0$$

$$\boxed{\partial_y A = A\sqrt{2B_0 - A^2}}$$

ist lösbar d. Trennung der Variablen

$$\frac{dA}{A\sqrt{2B_0 - A^2}} = dy \qquad \Big| \int$$

ist lösbar,
Bronstein

$C_0 = 0$ gesetzt weil f. $y \to \pm\infty$
Forderung, daß $A = 0$, $A' = 0$.

$\int_{y_0}^{y} dy' \to y - y_0$ (rechte Seite)

$\int_{A_0}^{A} dA' \dots \to$ ist ein langer Ausdruck mit ln, $\sqrt{\ }$ etc

$\to$ und A umstellen: $\boxed{A = A_0 \operatorname{sech}(A_0(y-y_0))}$

$$q = \underline{\underline{A_0}} \operatorname{sech}\left(\underline{\underline{A_0}}\,(y - v_s\xi - y_0)\right) e^{i\left(v_s y - \frac{v_s^2}{2}\xi + \underline{\underline{\frac{A_0^2}{2}}}\xi\right)}$$

Solitäre Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung

Amplitude A_0

Geschwindigkeit^{-1} $= v_s$

Zeitverschiebung y_0

$$B_0 = \frac{A_0^2}{2} \quad \text{ist bei Integrieren erzwingen.}$$

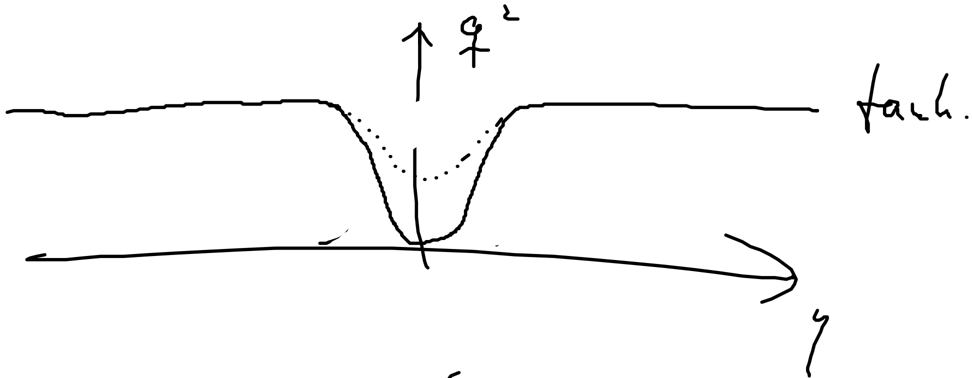
damit sind v_s und A_0 <u>nicht</u> unabhängig wählbar.

<u>Bemerkungen</u>:

a) solitäre Welle entstehen durch Kompensation von NL und Dispersion ($k_L'' < 0$, $u_2 \sim \alpha_K > 0$)

b) ohne Bedingung: diese solitäre Welle sind Solitonen

c) für $k_L'' > 0$ $\exists$ ein „dunkles" Soliton

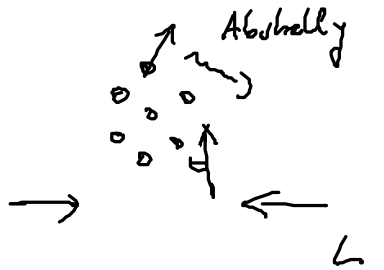


$$q \sim \tanh\left(A_0 \left(y - v_s \xi - y_0\right)\right)$$

$\exists$ auch graue Soliton (........)

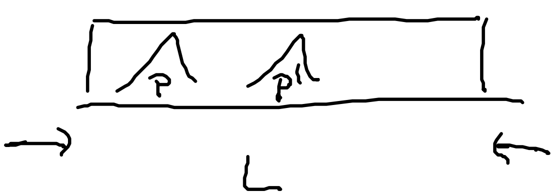
X Strahlungswechselwirkung einzelner atomarer Systeme

jetzt



$L \ll \lambda$

bisher



$L \gg \lambda$

„kollektive" Effekte in der Lichtemission

$\vec{P}(\vec{r}, t)$ ist Maß f. Abstrahlg.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{d}_{12}^{(i)} \rho_{12}^{i}(t)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) + h.c.$$

N - Dipole

„i-ter" Dipol Übergangswahrsch.-amplitude

Lage der Punktdipole

$$\dot{\rho}_{12}^{(i)} = -i\omega_{21}\rho_{12}^{(i)} + i\,\vec{d}_{21}^{\,i} \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r}_i, t)}\,/\hbar$$

$\vec{E}$-Feld am Ort $\vec{r}_i$ des i-ten Dipols setzt sich aus:

a) eingestrahltes Feld

b) abgestrahltes Feld der and. Dipole und d. i-ten Dipols selbst

(b) kann an Maxwelle berechnet werden.

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 \vec{P} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \equiv \vec{Q}(\vec{r}, t)$$

$\vec{E}$ ausrechnen aus dieser Gl.

und externes Feld (a) addieren

$\longrightarrow$ Fernfeld $\vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}(\vec{r}_i, t)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \; \frac{\vec{Q}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{}$$

$$|\vec r - \vec r'|$$

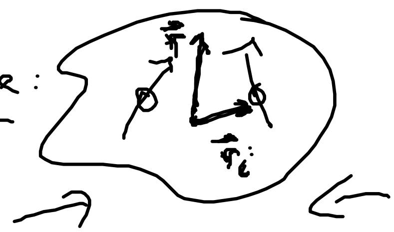
im Frequenzraum diskutieren

$$\vec E(\vec r, \omega) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d^3 r' \, \frac{\vec Q\left(\vec r', t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r'|} \, e^{i\omega t}$$

$$t \to t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \, \frac{\vec Q(\vec r', \omega)}{|\vec r - \vec r'|} \, e^{i\frac{\omega}{c}|\vec r - \vec r'|}$$

Annahme:



Bereich $\ll \lambda$

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$e^{i 2\pi \frac{|\vec r - \vec r'|}{\lambda}} \approx 1 + i\, 2\pi \frac{|\vec r - \vec r'|}{\lambda}$$

$$\vec E = -\frac{1}{4\pi}\left\{ \underbrace{\int d^3 r' \, \frac{\vec Q(\vec r', \omega)}{|\vec r - \vec r'|}}_{\text{gibt E-Verschiebung „Spiegeleffekt"}} + \underbrace{i\frac{\omega}{c} \int d^3 r' \, \vec Q(\vec r', \omega)}_{\text{ergibt Dämpfung der Dipoloszillation}} \right\}$$

$$\underbrace{\phi \rightleftarrows \rho}_{\text{kompliziert, u.U. } \infty} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{ansetzen}}$$

$$\int d^3r' \, Q(\vec{r}\,',\omega) = \underbrace{-\omega^2 \mu_0 \int d^3r' \, \vec{P}(\vec{r}\,',\omega)}\ \underbrace{+ \ldots \vec{D}' \vec{D}' \cdot \vec{P} \ldots}_{\text{bringt keinen neuen Einfluss, ändern nur Vorfaktoren}}$$

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = -\frac{i}{4\pi} \frac{\omega}{c} \left(-\omega^2 \mu_0 \sum_i \vec{d}_{12}^{\,i} \rho_{12}^{(i)}(\omega) \right)$$

hängt nicht von $\vec{r}$ ab.

(h.a. in RWA weglassen)

$L \ll \lambda$

$\vec{E}(\omega)$ kann jetzt in $\rho_{12}^{(i)}(\omega)$ eingesetzt werden:

$$-i\omega \rho_{12}^{(i)} = -i\omega_{21} \rho_{12}^{(i)} - \vec{d}_{21}^{\,(i)} \cdot \frac{\omega^3 \mu_0}{c\, 4\pi \hbar} \sum_u \vec{d}_{12}^{\,(u)} \rho_{12}^{(u)}(\omega)$$

Zurück in Zeitraum: a/ $\omega \approx \omega_{21}$ (RWA)

b/ identische Dipole $\sum_n \to N$

$\to$ n-Index weglassen

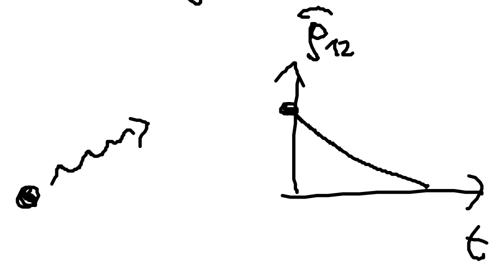
$$\partial_t \rho_{12} = -i\omega_{21}\rho_{12} - \gamma N \rho_{12}$$

$$\gamma = \frac{|d_{12}|^2 \omega_{21}^3 \mu_0}{\hbar c 4\pi}$$

AB

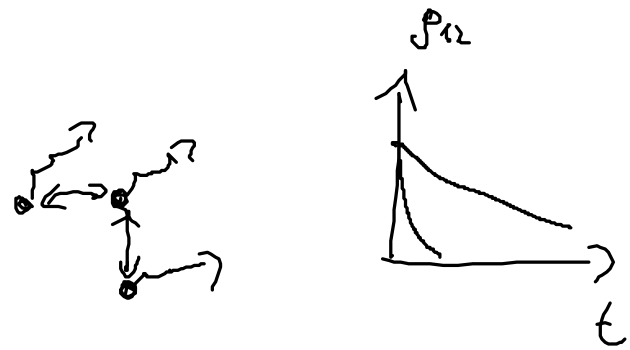
$$\rho_{12}(t) = e^{-i\omega_{12} t - \gamma N t} \underbrace{\rho_{12}(0)}_{\tilde{\rho}_{12}}$$

1. Dipol:



Dipol oszilliert, zerfällt d. Abstrahlg. ins Vakuum

N Dipole:



Ein Dipol zerfällt in Umgebg. v. $N-1$ Dipol

N mal schneller. $\rightarrow$ klassische Superradianz!

Intensität die abgestrahlt wird skaliert mit N^2.

<u>qm:</u> „Dicke - Modell"