# 6.5 Lösung der optischen Mastergleichung

Wdh.: Mastergleichung für Zwei-Niveau System gekoppelt an ein Bad von harmonischen Oszillatoren (EM-Feldmoden)

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t \rho_S(t) = & -i\frac{\varepsilon'}{2}[\sigma_z, \rho_S] \\ & + \gamma(\varepsilon)(N(\varepsilon)+1)\left(2\sigma_- \rho_S \sigma_+ - \sigma_+\sigma_- \rho_S - \rho_S \sigma_+ \sigma_-\right) \\ & + \gamma(\varepsilon)\, N(\varepsilon)\left(2\sigma_+ \rho_S \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho_S - \rho_S \sigma_- \sigma_+\right)\end{aligned}} \qquad (1)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon + \underbrace{\Delta_1(\varepsilon) + 2\Delta_2(\varepsilon)}_{\text{Lamb-Shift}}$$

$$\gamma(\varepsilon) = J(\varepsilon)$$

$$\Delta_1(\varepsilon) = P\int_0^\infty \frac{J(\omega)}{\varepsilon - \omega}\, d\omega$$

$$\Delta_2(\varepsilon) = P\int_0^\infty \frac{J(\omega)N(\omega)}{\varepsilon - \omega}\, d\omega$$

$$J(\omega) = \sum_k |g_k|^2 \delta(\omega - \omega_k)$$

## 6.5.1 Komponentenform der Mastergleichung

Populationen

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{eg}(t) \\ \rho_{ge}(t) & \rho_{gg}(t) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Kohärenzen

$$\rho_{ij} = \langle i | \rho_S(t) | j \rangle \qquad i,j \in e,g$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von Gl. (4),(3) in Gl. (1) mit Abkürzung $\gamma = \gamma(\varepsilon)$, $N = N(\varepsilon)$

$$\dot\rho_{ee}(t) = -2\gamma(N+1)\rho_{ee}(t) + 2\gamma N \rho_{gg}(t) \qquad (4a)$$

$$\dot\rho_{gg}(t) = -2\gamma N \rho_{gg}(t) + 2\gamma(N+1)\rho_{ee}(t) \qquad (4b)$$

$$\dot\rho_{eg}(t) = -[\gamma(2N+1) + i\varepsilon']\rho_{eg}(t) \qquad (4c)$$

$$\dot\rho_{ge}(t) = -[\gamma(2N+1) - i\varepsilon']\rho_{ge}(t) \qquad (4d)$$

Stationäre Lösung für $\dot\rho_{ee} = \dot\rho_{gg} = \dot\rho_{eg} = \dot\rho_{ge} = 0$

$$0 = -2\gamma(N+1)\rho_{ee}(t) + 2\gamma N \rho_{gg}(t) \qquad (5a)$$

$$0 = -2\gamma N \rho_{gg}(t) + 2\gamma(N+1)\rho_{ee}(t) \qquad (5b)$$

$$0 = -\underbrace{[\gamma(2N+1) + i\varepsilon']}_{\neq 0} \rho_{eg}(t) \qquad (5c)$$

$$0 = -\underbrace{[\gamma(2N+1) - i\varepsilon']}_{\neq 0} \rho_{ge}(t) \qquad (5d)$$

Aus (5c), (5d) folgt

$$\rho_{eg}(t) = \rho_{ge}(t) = 0 \quad \Rightarrow$$ im stationären Fall ist Dichtematrix diagonal (Dichtematrix)

Mit (5a), (5b) ergibt sich

$\rho_{gg} + \rho_{ee} = 1$ folgt aus Spur $\mathrm{tr}(\rho) = 1$

$$0 = -2\gamma(N+1)\rho_{ee}(t) + 2\gamma N(1 - \rho_{ee}(t))$$

$$0 = -(N+1)\rho_{ee}(t) + N(1 - \rho_{ee}(t))$$

$$(2N+1)\rho_{ee}(t) = N$$

$$\rho_{ee}(t) = \frac{N}{2N+1} = \frac{\overbrace{\frac{1}{e^{\varepsilon/kT}-1}}^{=N}}{2\frac{1}{e^{\varepsilon/kT}-1}+1} = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT}+1} \qquad (6)$$

Temperatur $T = 0 \rightarrow \rho_{ee}(t) = 0$

$T > 0 \rightarrow \rho_{ee}(t) \neq 0$

Lösung der Mastergleichung im Limit $T \rightarrow 0$

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/kT}-1} \xrightarrow[T\rightarrow]{} 0$$

Gleichungen (4a)-(4d) vereinfachen sich für $N = 0$ zu

$$\dot{\rho}_{ee}(t) = -2\gamma\rho_{ee}(t) \qquad (7a)$$

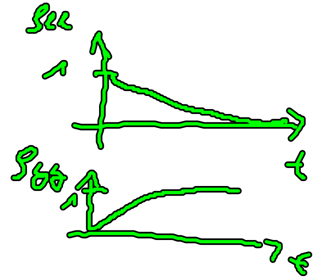
$$\dot{\rho}_{gg}(t) = 2\gamma\rho_{ee}(t) \qquad (7b)$$

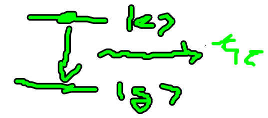
$$\dot{\rho}_{eg}(t) = -[\gamma + i\varepsilon']\rho_{eg}(t) \qquad (7c)$$

$$\dot{\rho}_{ge}(t) = -[\gamma - i\varepsilon']\rho_{ge}(t) \qquad (7d)$$

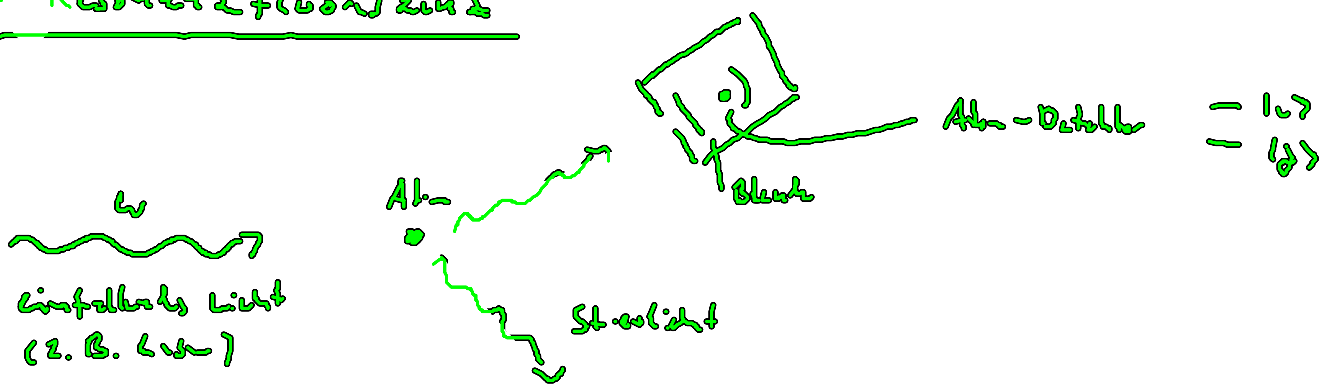
Lösung von (7c) - (7d)

$$\rho_{ee}(t) = e^{-2\gamma t}\,\rho_{ee}(0)$$
$$\rho_{gg}(t) = \left(1 - e^{-2\gamma t}\right)\rho_{ee}(0)$$
$$\rho_{eg}(t) = e^{-i\Omega' t}\, e^{-\gamma t}\,\rho_{eg}(0)$$
$$\rho_{ge}(t) = e^{+i\Omega' t}\, e^{-\gamma t}\,\rho_{ge}(0)$$




## 7 Resonanzfluoreszenz




Hamiltonian für Atom, EM-Feld und Dipolkopplung

$$H = H_A + H_{EM} + H_{A-EM}$$

$$H_A = \frac{\hbar\omega_{eg}}{2}\sigma_z \qquad \text{Zweiniveausystem}$$

$$H_{EM} = \sum_{k\lambda} \hbar\omega_{k\lambda}\, a^{+}_{k\lambda} a_{k\lambda} \qquad \text{EM-Feld} \qquad (k \equiv \vec{k})$$

$$H_{A-EM} = -e\,\vec{r}\cdot\vec{E} = -i\hbar \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}\left(\sigma_+ + \sigma_-\right)\left(a_{k\lambda} - a^{+}_{k\lambda}\right) \qquad \text{Dipolkopplung}$$

wobei

$$g_{k\lambda} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar\varepsilon_0 V}}\; e\cdot\vec{r}_{eg}\cdot\vec{e}_{k\lambda}$$

Polarisationsvektor für Mode k

Dipolmatrixelement $\langle e|\vec{r}|g\rangle = \vec{r}_{eg}$

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$$
$$[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm \qquad [a_{k\lambda}, a^{+}_{k'\lambda'}] = \delta_{kk'}\cdot\delta_{\lambda\lambda'}$$

Heisenberg'sche Bewegungsgleichung für Operatoren

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{O} = [\hat{H}, \hat{O}]$$

$$\dot{a}_{k\lambda}(t) = -i\omega_k a_{k\lambda}(t) + g_{k\lambda}(\sigma_+ + \sigma_-)$$
$$\dot{\sigma}_-(t) = -i\omega_{eg}\sigma_-(t) + \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}\sigma_z(t)(a_{k\lambda}(t) + a^+_{k\lambda}(t))$$
$$\dot{\sigma}_z(t) = 2\sum_{k\lambda} g_{k\lambda}(\sigma_-(t) - \sigma_+(t))(a_{k\lambda}(t) - a^+_{k\lambda}(t))$$

Drehwellennäherung (RWA)

$$\dot{a}_{k\lambda}(t) = -i\omega_k a_{k\lambda}(t) + g_{k\lambda}\sigma_-(t) \qquad (1)$$
$$\dot{\sigma}_-(t) = -i\omega_{eg}\sigma_-(t) + \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}\sigma_z(t)a_{k\lambda}(t) \qquad (2)$$
$$\dot{\sigma}_z(t) = -2\sum_{k\lambda} g_{k\lambda}(\sigma_-(t)a^+_{k\lambda}(t) + \sigma_+(t)a_{k\lambda}(t)) \qquad (3)$$

Mit Hilfe der positiven Frequenzkomponente des EM-Feldes

$$\vec{E}^+(t) = i\sum_{k\lambda}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\, a_{k\lambda}(t)\,\vec{e}_{k\lambda} \qquad (4)$$

Polarisationsvektor

sowie dem atomaren Dipol

$$\vec{d} = e\vec{r}_{eg}$$

lassen sich Gl. (2), (3) schreiben

$$\dot{\sigma}_-(t) = -i\omega_{eg}\sigma_-(t) - \frac{i}{\hbar}\vec{d}\cdot\vec{E}^+(t)\cdot\sigma_z(t) \qquad (5)$$
$$\dot{\sigma}_z(t) = -\frac{2i}{\hbar}\vec{d}\cdot\left[\vec{E}^-(t)\sigma_- - \vec{E}^+(t)\sigma_+\right] \qquad (6)$$

Integration von Gl. (1)

$$a_{k\lambda}(t) = \underbrace{a_{k\lambda}(0)\cdot e^{-i\omega_k t}}_{\text{Lösung der homogenen Maxwell-Gl.}} + \underbrace{g_{k\lambda}\int_0^t \sigma_-(t_1)e^{+i\omega_k(t_1-t)}dt_1}_{\text{Beitrag durch Atom}} \qquad (7)$$

Einsetzen von Gl. (7) in (3)

$$E^+(t) = \overbrace{i\sum_{k\lambda}\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\, a_{k\lambda}(0)e^{-i\omega_k t}\,\vec{e}_{k\lambda}}^{\equiv E_0^+(t)}$$
$$+ \underbrace{i\sum\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\, g_{k\lambda}\int_0^t \sigma_-(t_1)e^{+i\omega_k(t_1-t)}\,\vec{e}_{k\lambda}\,dt_1}_{\equiv E^+_{RR}(t)}$$

← "radiation reaction"

## 7.1 Emissionsspektrum

Durch das Feld assoziierte Leistung

$$P(t) = \frac{d}{dt}\,(\text{EM-Feld Energie})$$

$$= \frac{d}{dt}\langle H_{EM}\rangle = \frac{d}{dt}\sum_{k\lambda}\hbar\omega_k\langle a^+_{k\lambda}(t)\,a_{k\lambda}(t)\rangle$$

Einsetzen von Gl. (7)

Terme tragen zu stimulierte Emission und Absorption bei

$$P(t) = \sum_{k\lambda} g_{k\lambda}\hbar\omega_k\int_0^t\Big[\langle a^+_{k\lambda}(0)\,\sigma_-\rangle e^{i\omega_k t} + \langle\sigma_+(t)\,a_{k\lambda}(0)\rangle e^{-i\omega_k t}\Big]dt_1$$

$$+\underbrace{2\,\mathrm{Re}\Big\{\sum_{k\lambda} g^2_{k\lambda}\hbar\omega_k\int_0^t\langle\sigma_+(t_1)\,\sigma_-(t)\rangle e^{-i\omega_k(t_1-t)}\,dt_1}_{\text{Streulicht}}$$

Assoziierte Leistung durch Streulicht

$$P_S(t) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k\lambda}\frac{\omega_k|d|^2\cdot\cos^2\theta}{2\varepsilon_0 V}\int_0^t\langle\sigma_+(t_1)\,\sigma_-(t)\rangle e^{i\omega_k(t-t_1)}\,dt_1$$

$$\vec{d}\cdot\vec{e}_{k\lambda} = |d|\cos\theta$$ ← Winkel zwischen Dipolmoment des Atoms und Polarisationsachse des Lichts

Kontinuum-Limit für Moden

$$\sum_{k\lambda}\to\frac{V}{(2\pi)^3}\sum_{\lambda=1,2}\int dk\,k^2\int\sin\theta\,d\theta\int d\varphi$$

Langsam veränderliche atomare Operatoren

$$S_\pm(t) = \sigma_\pm(t)\,e^{\mp i\omega_L t}$$

$\omega_L$ → Frequenz des einfallenden Lichts

$$\rightsquigarrow\quad P_S(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4|d|^2}{3\pi c^3}\mathrm{Re}\Big\{\int_0^\infty\omega^4\,d\omega\int_0^t\langle S_+(t_1)\,S_-(t)\rangle e^{+i(\omega-\omega_L)(t-t_1)}\,dt_1$$

Annahme, daß einfallendes Licht (eingehendes Spektrum) spektral um $\omega\approx\omega_L$ stark gepeakt ist, Limit $t\to\infty$ und $\tau = t - t_1$

$\rightsquigarrow$ $P_s(\omega) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4|d|^2\omega_L^4}{3\pi c^3}}_{c_0}\int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \langle S_+(t_0) S_-(t_0+\tau)\rangle e^{+i(\omega-\omega_L)\tau} d\tau$

$$\boxed{S(\omega) \equiv 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \langle S_+(t_0) S_-(t_0+\tau)\rangle e^{i(\omega-\omega_L)\tau} d\tau} \qquad (8)$$

Leistungsspektrum der Resonanzfluoreszenz

$P_s = c_0 \cdot \int_0^\infty S(\omega)\, d\omega$ "spektrale Leistung aufsummiert über alle Moden"

## 7.2 Atomare Korrelationsfunktion

Definition

$$g(\tau) \equiv \langle S_+(t_0) S_-(t_0+\tau)\rangle \qquad (9)$$

$$\rightsquigarrow \quad S(\omega) = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty g(\tau)\, e^{i(\omega-\omega_L)\tau} d\tau$$

Spektrum des Streulichts bzw. Resonanzfluoreszenz

Heisenberg'sche Bewegungsgleichung Gl. (5) umgeschrieben auf atomare Operatoren $S_-$

linear polarisiertes Licht parallel zu atomarem Dipol

$$\dot{S}_-(t) = -i(\omega_{eg} - \omega_L - i\beta)\, S_-(t) - \frac{i}{\hbar}\, d\, \sigma_z\, E_0^+(t)\, e^{i\omega_L t} \qquad (10)$$

$$\dot{\sigma}_z(t) = -2\beta\left[1 + \langle\sigma_z(t)\rangle\right] - \frac{2i}{\hbar}\, d\left[S_-(t)\, E_0^-(t)\, e^{-i\omega_L t} - S_+(t)\, E_0^+(t)\, e^{+i\omega_L t}\right] \qquad (11)$$

wobei $\beta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|d|^2\omega_{eg}^3}{3\hbar c^3}$ und der atomare Dipol parallel zum linear polarisierten einfallenden Feld gewählt wurde

Zeitliche Ableitung von Gl. (9)

$$\frac{d}{d\tau} g(\tau) = \frac{d}{d\tau}\langle S_+(t_0) S_-(t_0+\tau)\rangle$$

$$= -i\left((\omega_{eg} - \omega_L - i\beta)\right) g(\tau) + \frac{d E_0}{2\hbar}\overbrace{\langle S_+(t_0)\, \sigma_z(t_0+\tau)\rangle}^{h(\tau)}$$

Heisenberg'sche Bewegungsgleichung

Um einen geschlossenen Satz von Gleichungen zu erhalten führt man noch folgende Korrelationsfunktion ein

$$h(\tau) = \langle S_+(t_0)\, \sigma_z(t_0+\tau) \rangle$$

$$f(\tau) = \langle S_+(t_0)\, S_+(t_0+\tau) \rangle$$

Diese Korrelationsfunktionen erfüllen folgende gekoppelte Differentialgleichungen

Rabi-Frequenz

$$\frac{d}{d\tau} g(\tau) = -i(\omega_{eg} - \omega_L - i\beta)\, g(\tau) + \frac{1}{2}\Omega\, h(\tau) \qquad (12a)$$

$$\frac{d}{d\tau} f(\tau) = +i(\omega_{eg} - \omega_L + i\beta)\, f(\tau) + \frac{1}{2}\Omega\, h(\tau) \qquad (12b)$$

$$\frac{d}{d\tau} h(\tau) = -2\beta \langle S_+(t_0) \rangle - \Omega\left(f(\tau) + g(\tau)\right) - 2\beta\, h(\tau) \qquad (12c)$$

Anfangsbedingung zur Lösung

$$g(0) = \langle S_+(t_0)\, S_-(t_0) \rangle = \frac{1}{2}\left[1 + \langle \sigma_z(t_0) \rangle\right]$$

$$h(0) = \langle S_+(t_0)\, \sigma_z(t_0) \rangle = -\langle S_+(t_0) \rangle$$

$$f(0) = \langle S_+(t_0)\, S_+(t_0) \rangle = 0$$

Für große Feldstärken $\Omega \gg \beta$ und resonantem einfallenden Licht $\omega_{eg} = \omega_L$ folgt als Lösung der DGL's (12a)–(12c)

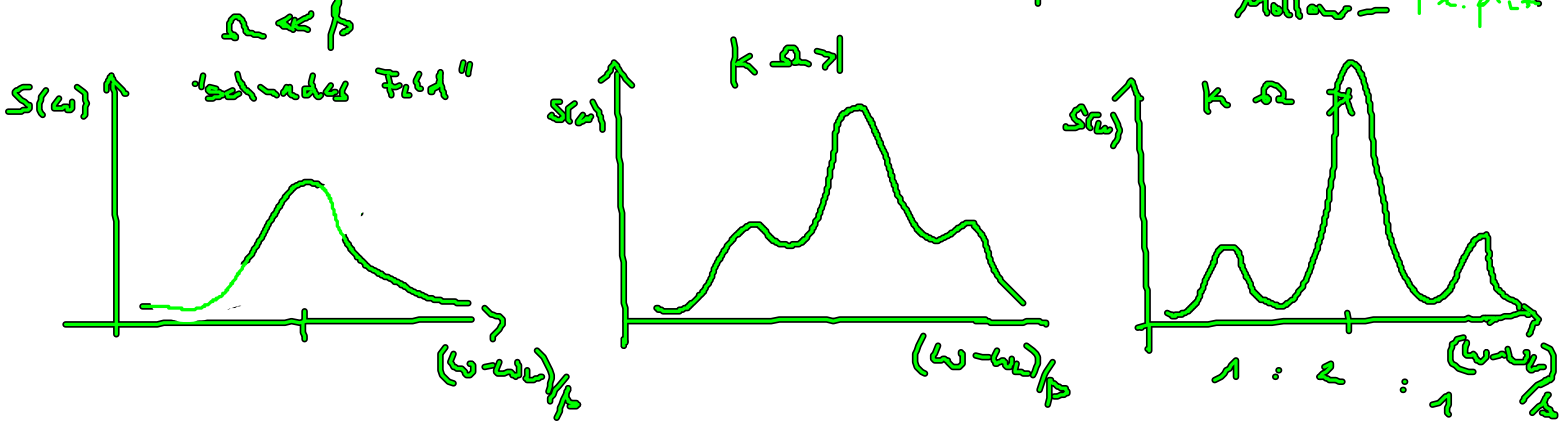
$$g(\tau) = \frac{1}{2}\left[e^{-\beta\tau} + e^{-\frac{3\beta\tau}{2}} \cos(\Omega\tau)\right] + \left(\frac{\beta}{\Omega}\right)^2 \qquad (13)$$

Einsetzen der Lösung Gl. (13) in die Formel für das Leistungsspektrum liefert

$$\boxed{S(\omega) = 2\pi\left(\frac{\beta}{\Omega}\right)\delta(\omega-\omega_L) + \frac{\beta/2}{(\omega-\omega_L)^2+\beta^2} + \frac{3\beta/8}{(\omega-\omega_L-\Omega)^2+9\beta^2/4} + \frac{3\beta/8}{(\omega-\omega_L+\Omega)^2+9\beta^2/4}}$$

# Resonanzfluoreszenzspektrum

„Mollow-Triplett“




## Interpretation durch Jaynes-Cummings Leiter