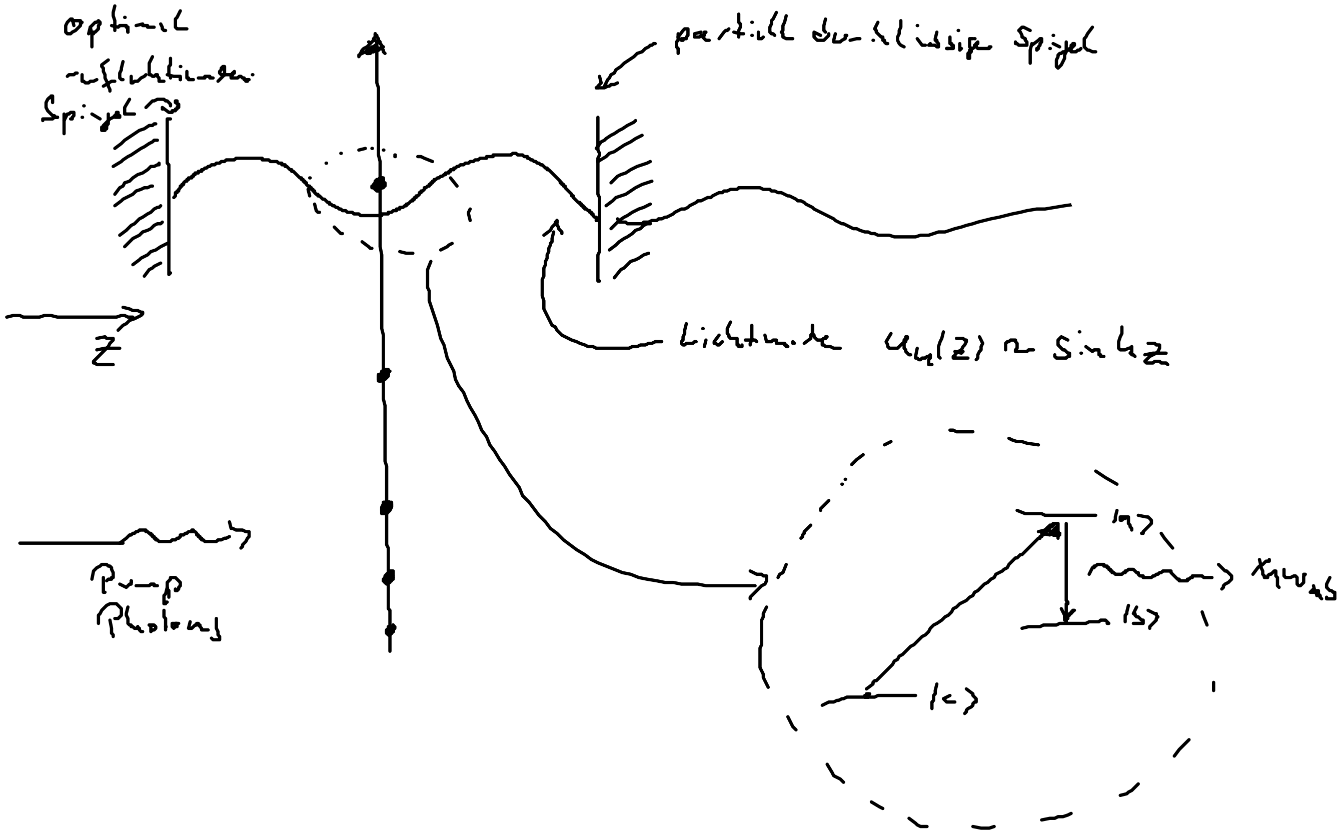
8. Quantentheorie des Lasers



Semiklassische Beschreibung (Materie quantenmechanisch und Licht klassisch beschrieben) erlaubt keine Aussage zu z.B.

- Photonen-Statistik des emittierten Lichts
- Linienbreite des Lasers
- Phasenfluktuation des Lasers

  ...

$\Rightarrow$ erfordert volle Quantentheorie des Lasers

8.1 Zeitentwicklung der Dichtematrix

Jaynes-Cummings Hamiltonian für zwei-Niveau System plus Lichtmode und Kopplung (mit Drehwellennäherung und Dipol-Näherung)

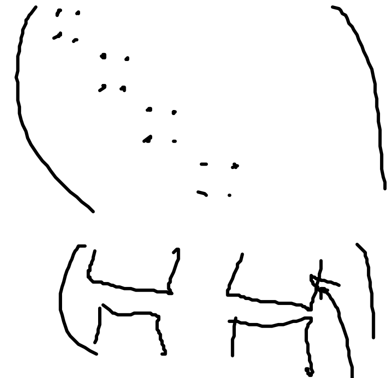
$$\underline{H} = \frac{\hbar\omega_{as}}{2}\underline{\sigma_z} + \hbar\omega\,\underline{a}^+\underline{a} + \hbar g\left(\underline{\sigma_+}\,\underline{a} + \underline{\sigma_-}\,\underline{a}^+\right)$$

Aufteilung des Hamiltonians

$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_1$$

$$\underline{H}_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\,\underline{\sigma}_z + \hbar\omega\,\underline{a}^\dagger\underline{a}$$

$$H_1 = \hbar\frac{\delta}{2}\,\underline{\sigma}_z + \hbar g\,(\underline{\sigma}_+\underline{a} + \underline{\sigma}_-\underline{a}^\dagger)$$



Detuning

$$\delta = \omega_{as} - \omega$$

$$[H_0, H_1] = 0$$

Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild

$$\underline{U}(\tau) = e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{H}_1\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\tau/\hbar)^n}{n!}\,H_1^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\tau/\hbar)^n}{n!}\begin{bmatrix}\frac{\delta}{2} & g\,\underline{a}\\ g\,\underline{a}^\dagger & -\frac{\delta}{2}\end{bmatrix}^n$$

(*) $\underline{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\underline{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a^\dagger \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Matrix Potenzen in der Taylorreihe von $U(\tau)$

gerade, $2m$: $$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} & g\underline{a} \\ g\underline{a}^+ & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}^{2m} = \begin{bmatrix} (\underline{\varrho}+g^2)^m & 0 \\ 0 & (\underline{\varrho})^m \end{bmatrix}$$

ungerade, $2m+1$: $$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} & g\underline{a} \\ g\underline{a}^+ & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}^{2m+1} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{2}(\underline{\varrho}+g^2)^m & g(\underline{\varrho}+g^2)^m \underline{a} \\ g\underline{a}^+(\underline{\varrho}+g^2)^m & -\frac{\delta}{2}(\underline{\varrho})^m \end{bmatrix}$$

wobei
$$\underline{\varrho} = g^2 \underline{a}^+\underline{a} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

$\underline{a} + 5 \Rightarrow \underline{a} + 5 \cdot \underline{\mathbb{1}}$

$$\underline{U}(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\tau\sqrt{\underline{\varrho}+g^2}) - \frac{i\delta}{2}\frac{\sin(\tau\sqrt{\underline{\varrho}+g^2})}{\sqrt{\underline{\varrho}+g^2}} & -ig\frac{\sin(\tau\sqrt{\underline{\varrho}+g^2})}{\sqrt{\underline{\varrho}+g^2}}\underline{a} \\ -ig\underline{a}^+\frac{\sin(\tau\sqrt{\underline{\varrho}+g^2})}{\sqrt{\underline{\varrho}+g^2}} & \cos(\tau\sqrt{\underline{\varrho}}) + \frac{i\delta}{2}\frac{\sin(\tau\sqrt{\underline{\varrho}})}{\sqrt{\underline{\varrho}}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{q} = \underline{\sigma}_+ \underline{a} = \underline{\sigma}_+ \otimes \underline{a} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & 0 & & 0 & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{N\times N} = \underbrace{\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}}_{2N\times 2N}$$

Anfangsbedingung für Dichteoperator von Atom + Feld

$$\varrho(t=0) = \varrho_F(0) \otimes \varrho_A(0) = \varrho_F(0) \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{= \varrho_A(0) = \begin{pmatrix} \varrho_{aa} & \varrho_{ab} \\ \varrho_{ba} & \varrho_{bb} \end{pmatrix}}$$

$|a\rangle$

$|b\rangle$

Zeitentwicklung des Dichteoperators von Atom + Feld

$$\underline{\varrho}(\tau) = \underline{U}(\tau)\,\underline{\varrho}(0)\,\underline{U}^+(\tau) = \underline{U}(\tau)\,\underline{\varrho}_F(0) \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{U}^+(\tau)$$

Ausmultiplizieren und Spur über Atomare Zustände, Detuning $\delta = 0$

$$\rho_F(\tau) = \mathrm{Tr}_{Atom}(\rho(\tau))$$

$$= \cos(\underline{\lambda}\tau)\,\underline{\rho}_F(0)\cos(\underline{\lambda}\tau) + g^2\underline{a}^+ \frac{\sin(\underline{\lambda}\tau)}{\underline{\lambda}}\,\underline{\rho}_F(0)\,\frac{\sin(\underline{\lambda}\tau)}{\underline{\lambda}}$$

$$\equiv \mathcal{M}_{Gain}\,\rho(0) \qquad (5)$$

Gain-Superoperator

wobei

$$\underline{\lambda} = g\sqrt{\underline{a}^+\underline{a}+1}$$

Mastergleichung mit Pump und mit Cavity Verlusten

$$\frac{d\rho_F}{dt} = \left(\frac{d\rho_F}{dt}\right)_{gain} + \left(\frac{d\rho_F}{dt}\right)_{loss}$$

$$\left(\frac{d\rho_F}{dt}\right)_{loss} = \frac{C}{2}\left(2\underline{a}\,\rho_F\,\underline{a}^+ - \underline{a}^+\underline{a}\,\rho_F - \rho_F\,a^+a\right)$$

↳ Verluste durch Auskopplung des Laserlichts am partiell durchlässigen Spiegel der Cavity
-> "Lindblad - Dissipation", s. Kapitel 6.

$$\left(\frac{d\rho_F}{dt}\right)_{gain} \approx \frac{\rho_F(t+\Delta t) - \rho_F(t)}{\Delta t}$$

$$= r\left[\rho_F(t+\Delta t) - \rho_F(t)\right]$$

$$\approx -r\rho_F(t) + r\int_0^{\Delta t} \underbrace{\exp(-\gamma\tau)}\,\rho_F(t+\tau)\,d\tau$$

Einsetzen von Gl. (5)

Zerfall der oberen Population während der Transit-Zeit durch die Cavity

$$= -r\rho_F(t) + r\int_0^{\Delta t} d\tau\, \exp(-\gamma\tau)\cdot\Big[\cos\left(\sqrt{a^+a+1}\, g\tau\right)\rho_F(t) \times \cos\left(\sqrt{a^+a+1}\, g\tau\right) + a^+\Big[\frac{\sin\left(\sqrt{a^+a+1}\, g\tau\right)}{g\sqrt{a^+a+1}}\,\rho_F(t)\,\frac{\sin\left(\sqrt{a^+a+1}\, g\tau\right)}{g\sqrt{a^+a+1}}\Big]a\Big]$$

Matrix-Elemente der Master-Gleichung

$$\rho_{nm} = \langle n|\rho_F|m\rangle \qquad (7)$$

erfordern folgende Integrale

$$\gamma\int_0^{\Delta t\to\infty} d\tau\, \exp(-\gamma\tau)\cos\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(\sqrt{m+1}\, g\tau\right)$$

$$= \frac{1+\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2(n+m+2)}{1+2\left(\frac{g}{\gamma}\right)^2(n+m+2)+\left(\frac{g}{\gamma}\right)^4(n-m)^2} \qquad (8)$$

$$\gamma\int_0^{\Delta t\to\infty} d\tau\, \exp(-\gamma\tau)\sin\left(g\tau\sqrt{n+1}\right)\cos\left(g\tau\sqrt{m+1}\right)$$

$$= \frac{2\left(g/\gamma\right)^2\sqrt{(n+1)(m+1)}}{1+2\left(g/\gamma\right)^2(n+m+2)+\left(g/\gamma\right)^4(n-m)^2} \qquad (9)$$

Abkürzungen

$A = \frac{2rg^2}{\gamma^2}$ Pump-Koeffizient

$B = \frac{4g^2}{\gamma^2}A$ Sättigungs-Koeffizient

$C = \frac{\omega}{Q} = \frac{1}{t_{cav}}$ Verlust-Koeffizient, t_{cav} - Photonenlebensdauer in der Cavity

Qualitätsfaktor der Cavity

Für die Matrixelemente von Gl. (6) unter Verwendung von Gl. (8), (9) folgt:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nm} = -\frac{\tilde{N}_{nm} A}{1+N_{nm}\frac{B}{A}} \rho_{nm} + \frac{\sqrt{n\,m}\, A}{1+N_{n-1,m-1}\frac{B}{A}} \rho_{n-1,m-1} \qquad (11)$$

$$-\frac{C}{2}(n+m)\rho_{nm} + C\sqrt{(n+1)(m+1)}\,\rho_{n+1,m+1}$$

wobei

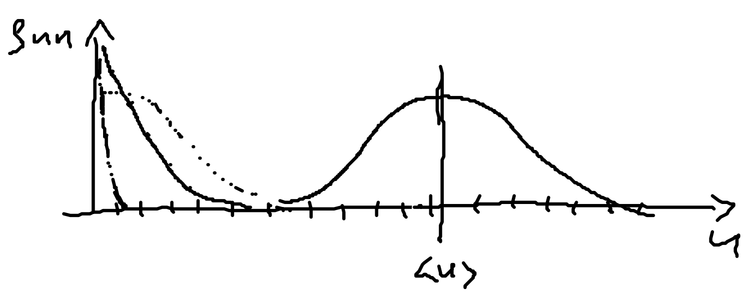
$$\tilde{N}_{nm} = \frac{1}{2}(n+m+2) + \frac{1}{8}(n-m)^2\frac{B}{A}$$

$$N_{nm} = \frac{1}{2}(n+m+2) + \frac{1}{16}(n-m)^2\frac{B}{A}$$

Für die Moden-Populationen (Diagonalelemente) folgt

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nn} = -\frac{A(n+1)}{1+(n+1)\frac{B}{A}}\rho_{n,n} + \frac{A(n)}{1+(n)\frac{B}{A}}\rho_{n-1,n-1}$$

$$-C(n)\rho_{nn} + C(n+1)\rho_{n+1,n+1}$$



8.2 Photon-Statistik des Lasers im stationären Zustand

Stationärer Limit

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{nn} = 0$$

$$\leadsto \quad \rho_{n+1,n+1} = \frac{A/C}{1+(n+1)\frac{B}{A}}\rho_{nn} \qquad \to \text{Rekursion}$$

Lösung der Rekursion

Fall 1: Laser unterhalb des Schwellwertes, $\frac{A}{C} < 1$, $k \equiv n+1$

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \left(\frac{A}{C}\right)^n \prod_{k=0}^{n} \Big(1 + \underbrace{k\frac{B}{A}}_{\ll 1}\Big)^{-1} \qquad (13)$$

Normierungsbedingung für $\frac{A}{C} < 1$

$$\sum_n \rho_{nn} = 1 = \rho_{00} \sum_n \left(\frac{A}{C}\right)^n = \rho_{00} \cdot \frac{1}{1-\frac{A}{C}} \overset{!}{=} 1$$

$$\rho_{00} = 1 - \frac{A}{C} \qquad (14)$$

Für $(n+1)\frac{B}{A} \ll 1$ folgt aus Gl (13), (14)

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_{nn} &= \left(1-\frac{A}{C}\right)\left(\frac{A}{C}\right)^n \underbrace{\prod_{k=0}^{n}(1 + \text{"}0\text{"})^{-1}}_{\approx 1} \\ &= \left(1-\frac{A}{C}\right)\left(\frac{A}{C}\right)^n \end{aligned}}$$

Im Falle $A/C \sim \exp(-\hbar\Omega/kT)$ entspricht das der Bose-Einstein Verteilung für Schwarzkörperstrahlung.

Fall 2: Laser oberhalb des Schwellwertes, $A/C > 1$

$$\rho_{nn} = \rho_{00} \left(\frac{A}{C}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{kB}{A}\right)^{-1}$$

$$= \rho_{00} \left(\frac{A^2}{BC}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{A}{B} + k\right)^{-1} \qquad (15)$$

Mittlere Photonenzahl

$$\langle n \rangle = \sum_n n \cdot \rho_{nn} = Tr(\hat{n}\rho)$$

$$\underset{\text{Gl. (15)}}{\overset{\uparrow}{=}} \rho_{00} \sum_n \left(n + \frac{A}{B} - \frac{A}{B}\right) \cdot \left(\frac{A^2}{BC}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{A}{B} + k\right)^{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{nn} = 1 - \rho_{00}$$

$$= \rho_{00} \frac{A^2}{BC} \sum_n \underbrace{\left(\frac{A^2}{BC}\right)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{A}{B} + k\right)^{-1}} - \frac{A}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{nn}$$

$\rho_{nn} \to \sum_n \rho_{nn} = 1$

$$= \frac{A^2}{BC} - \frac{A}{B}(1 - \rho_{00})$$

$$\to \frac{A^2}{BC} \quad \text{für Laser deutlich oberhalb des Schwellwertes} \qquad (16)$$

Mit Gl. (15) und (16) folgt für die Photonen-Population

$$\rho_{nn} \sim \langle n \rangle^n \frac{\exp(-\langle n \rangle)}{n!} \quad \text{Poisson-Verteilung}$$

Photon-statistik des Lasers im stationären Fall