

Theoret. Physik VI : Vertiefung (Nichtlineare Dynamik u. Kontrolle)

VL SS 2015 Eikehard Schöll

Masterstudiengang Physik: Pflichtvorles. TP V/VI (grundlagenorientiert)
11 + 10 ECTS 2 Scheine

anwend. orientiert : TP V oder TP VI

VL Di + Do 8:15 - 10:00 EW 203

UE : A. Zakharova, Jan Tötz

Ergänz. Seminar : "Noise effects in Complex Systems" (Nichtlin. Dynamik)

Di 12:15 - 13:00 EW 731

- VL kann auch als Wahlpflichtfach (8 SWS, 1 Schein, 12 ECTS) im Masterstudiengang kombiniert werden mit
 - Sem. "Noise effects in Complex Systems" 3233 L 607
 - Spezialvorles. "Nichtlin. Dyn./Epidemiologie" 3233 L 535 (Hövel)
Mi 10:15 - 11:45 EW 733
 - Spezialvorles. "Nonlinear Laser dynamics" Fu Berlin (Lidge)
Do 14 - 16:00

<http://www.itp.tu-berlin.de/menne/lehre/lv/ss-2015>

Inhalte der VL

1. Dyn. Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlin. Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren
4. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
5. Gekoppelte Systeme u. Netzwerke
6. Anwendung auf Neurodynamik
7. Chimera - Zustände

1. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

Fragestellungen der Nichtlinearen Dynamik :

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollpar.)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeit von Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss, d.h. die Gesamtheit aller Bahnen
- geordnete oder ungeordnete (chaot.) Lösungen

Qualitative Dynamik: Fluss als Ganzes, Stabilität, topolog. Struktur, Langzeitverhalten

1.1 Vektorfelder als dynamische Systeme

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlin.) Dgl. 1. Ordnung formulieren:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dyn. Var.

$\underline{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Beweg. gl. mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y, t)}_{\text{Reibung}} \dot{y} + \underbrace{f_2(y, t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1(x_1, t)x_2 - f_2(x_1, t) \end{array}$$

speziell Hamilton'sche Systeme:

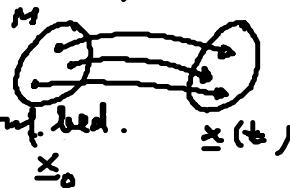
$$\left. \begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \quad H(q, p) \text{ Hamiltonfkt}$$

Fluss des Vektorfeldes \underline{F} auf der Mannigfaltigkeit M :
(Phasenraum, z.B. \mathbb{R}^n)

$$\phi: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M$$

mit $\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$ Anf. bed. $\underline{x}(t)$
(Gesamtheit der Bahnkurven)

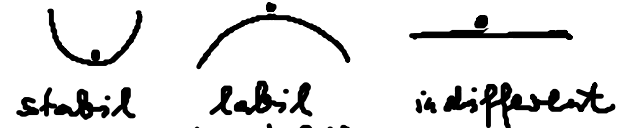
= Trajektorien



Fixpunkt \underline{x}^* des autonomen dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

(stationäre Pkte., Gleichgewichtspkte., singuläre Pkte., krit. Pkte.)

$$0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) \Rightarrow \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes: 

Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen

$$\underline{\delta x} := \underline{x} - \underline{x}^*$$

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{\underline{x}^*} \delta x_k$$

$$\underline{\delta \dot{x}} = (DF)_* \underline{\delta x} \quad \text{mit Jacobi-Matrix } DF$$

System von lin. Dgl. mit konst. Koeff.

Lösungsausatz $\underline{\delta x}(t) = \underline{\xi} e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$

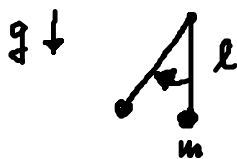
$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \text{Eigenwertgl.}$$

λ_k : Eigenwerte
 $\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektoren } der Jacobi-Matrix $(DF)_* \equiv A$

allg. Lösung: $\underline{\delta x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k
 c_k durch Anfangsbed. bestimmt)

Beispiele (i) Ebene Pendel $ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0$



$$x_1 = \varphi$$

$$x_2 = p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi}$$


$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{ml^2}$$

$$\dot{x}_2 = -mgl \sin x_1$$

Fixpunkte. $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$

Linearisierung $\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a) $x_1 = x_2 = 0$



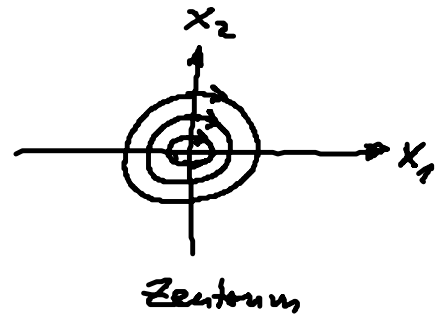
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m l^2} \\ -mgl & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$

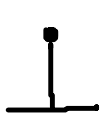
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$$

ungedämpfte Schwingungen



b) $x_1 = \pi, x_2 = 0$



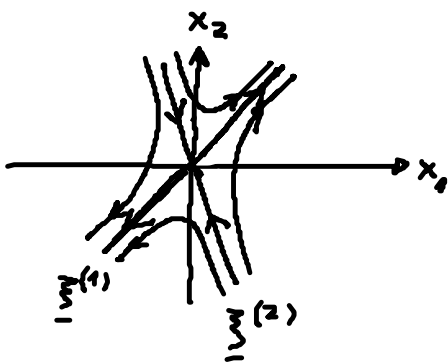
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

„Segway“

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$

allg. Lösung $\delta \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}$



Sattelpunkt

$t \rightarrow \infty \downarrow$
 ∞
instabil
 längs Richtung
 von $\underline{\xi}^{(1)}$

NB: Da Matrix A nicht symm. ist,
 sind die Eigenvektoren i.g.
 nicht senkrecht zueinander!