Theoret. Physik VI : Vertiefung (Nichtlineare Dynamik u. Kontrolle)

VL SS 2015 Eckehard Schöll

Masterstudiengang Physik: Pflichtvorles. TP V/VI (grundlagenorientiert)
11 + 10 ECTS 2 Scheine
anwend.orientiert: TP V oder TP VI

VL Di + Do 8:15 – 10:00 EW 203

UE: A. Zakharova, Jan Totz

Ergänz. Seminar: "Noise effects in Complex Systems" (Nichtlin. Dynamik)
Di 12:15 – 13:00 EW 731

- VL kann auch als Wahlpflichtfach (8 SWS, 1 Schein, 12 ECTS) im Masterstudiengang kombiniert werden mit
  - Sem. "Noise effects in Complex Systems" 3233 L 607
  - Spezialvorles. "Nichtlin. Dyn./Epidemiologie" 3233 L 535 (Hövel) Mi 10:15 – 11:45 EW 733
  - Spezialvorles. "Nonlinear laser dynamics" FU Berlin (Lüdge) Do 14 – 16:00

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss_2015

Inhalte der VL

1. Dyn. Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlin. Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren
4. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
5. Gekoppelte Systeme u. Netzwerke
6. Anwendung auf Neurodynamik
7. Chimera – Zustände

1. Dynamische Systeme und deterministisches Chaos

Fragestellungen der Nichtlinearen Dynamik:

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollpar.)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeit von Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss,
  d.h. die Gesamtheit aller Bahnen
- geordnete oder ungeordnete (chaot.) Lösungen

<u>Qualitative Dynamik</u> : Fluss als ganzes, Stabilität, topolog. Struktur, Langzeitverhalten

<u>1.1 Vektorfelder als dynamische Systeme</u>

Dynamik vieler Systeme lässt sich als System von (nichtlin.) Dgl. 1. Ordnung formulieren:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)} \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^n \ \underline{\text{dyn. Var.}}$$

$$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \underline{\text{Vektorfeld}}$$

<u>determinist. dyn. System</u>

z.B. Newton'sche Beweg.gl. mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y,t)\dot{y}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{f_2(y,t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &:= y \\ x_2 &:= \dot{y} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f_1(x_1,t)\,x_2 - f_2(x_1,t) \end{aligned}$$

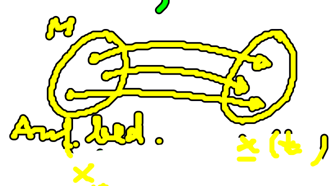
speziell Hamilton'sche Systeme:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= p \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \qquad H(q,p) \text{ Hamiltonfkt}$$

<u>Fluss des Vektorfeldes</u> $\underline{F}$ auf der Mannigfaltigkeit M:
(Phasenraum, z.B. $\mathbb{R}^n$)

$$\phi : M \times \mathbb{R}_t \to M$$

mit $\phi(x_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; x_0)$



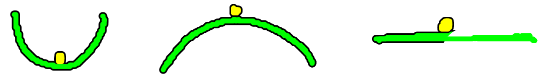
(Gesamtheit der Bahnkurven)
= <u>Trajektorien</u>

Fixpunkt $\underline{x}^*$ des autonomen dyn. Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

(stationäre Pkte., Gleichgewichtspkte., singuläre Pkte, krit. Pkte.)

$$0 = \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^*$$

Stabilität eines Fixpunktes :



stabil   labil (instabil)   indifferent

Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen

$\delta\underline{x} := \underline{x} - \underline{x}^*$:

$$\boxed{\delta\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\underline{x}^*} \delta x_k}$$

$\boxed{\delta\dot{\underline{x}} = (DF)_* \, \delta\underline{x}}$ mit Jacobi-Matrix DF

System von lin. Dgl. mit konst. Koeff.

Lösungsansatz $\quad \delta\underline{x}(t) = \underline{\xi}\, e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda\underline{\xi} = A\underline{\xi}$

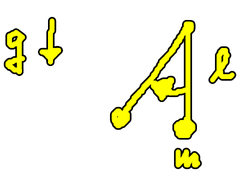
$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ Eigenwertgl.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_k : \text{Eigenwerte} \\ \underline{\xi}^{(k)} : \text{Eigenvektoren} \end{array}\right\} \text{der Jacobi-Matrix } (DF)_* \equiv A$$

allg. Lösung: $\quad \delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte λ_k
c_k durch Anfangsbed. bestimmt)

Beispiele (i) Ebene Pendel $\quad m l^2 \ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$

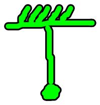


$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = -mgl\sin x_1 \end{array}$$

Fixpkte. $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0, \quad x_1 = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$

Linearisierung $\quad \begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -mgl\cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

a) $x_1 = x_2 = 0$



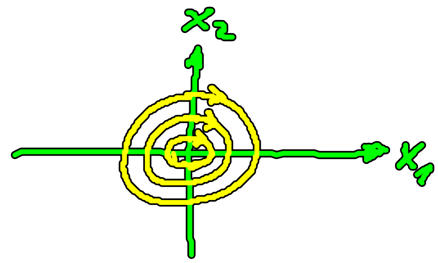
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte : $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega$

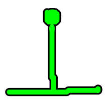
$\Rightarrow \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-i\omega t}$

<u>ungedämpfte Schwingungen</u>



Zentrum

b) $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

„Segway"

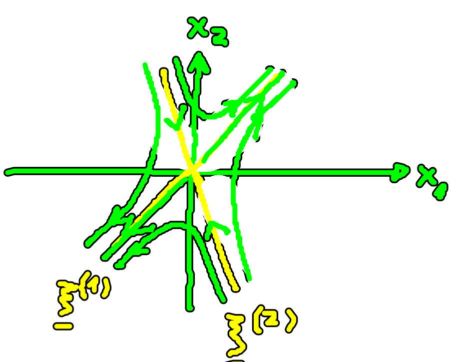
$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$

Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$

allg. Lösung $\delta \underline{x}(t) = c_1 \underline{\xi}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + c_2 \underline{\xi}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}$

$t \to \infty \downarrow \infty$

<u>instabil</u>
längs Richtung
von $\underline{\xi}^{(1)}$



<u>Sattelpunkt</u>

NB: Da Matrix A nicht symm. ist, sind die Eigenvektoren i.a. nicht senkrecht zueinander!