

English Summary:

1. Dynamical systems and deterministic chaos

$$\dot{x} = F(x(t), t) \quad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \text{ dynamical variable} \\ F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ vector field} \end{array}$$

$\phi: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M$ flow of the vector field F

$\phi(x_0, t) = \phi_t(x_0) = x(t, x_0)$ ensemble of all trajectories

Stability of fixed point x^* ($0 = \dot{x} = F(x^*)$)

$\delta \dot{x} = (DF)_x \delta x$ with Jacobian $(DF)_x = A$, $\delta x = x - x^*$

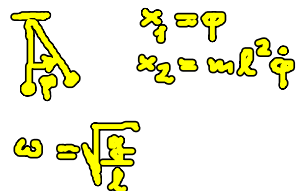
ansatz $\delta x = \xi e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda \xi = A \xi \Rightarrow$ eigenvalues λ_k

Beispiel für ein dynamisches System:

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma \dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$$

Reibung



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{ml^2} \\ \dot{x}_2 = -mgl \sin x_1 - 2\gamma x_2 \end{cases}$$

} Fixpunkte ungerändert

Linearisierung: $\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl \cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$

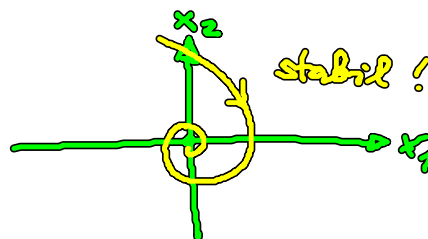
a) $x_1 = x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl & -2\gamma \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \frac{g}{l} = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ (schwache Reibung $\gamma^2 < \omega^2$)

(a) gedämpfte Schwingungen (schwache Reibung)

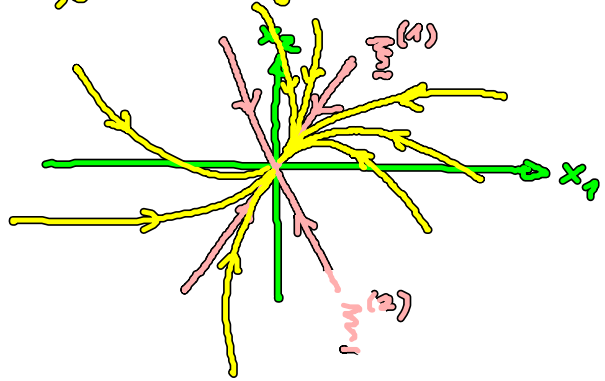


stabiler Fokus

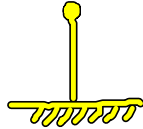
(a₂) aperiodische gedämpfte Bewegung
(überdämpfte Osz.)

starke Reibung ($\gamma^2 > \omega^2$): $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

stabiler Knoten



b) $x_1 = \pi, x_2 = 0$



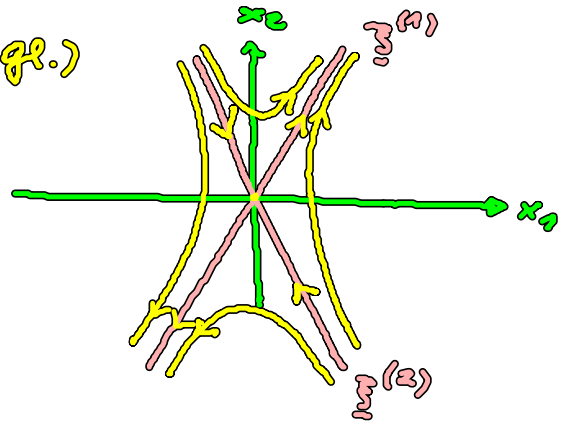
$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda - \omega^2 = 0 \quad (\text{char. Gl.})$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \underbrace{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}}_{> \gamma}$$

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 < 0$$

instabil!



Sattelpunkt

1.2 Stabilität und Langzeitverhalten

allg. Def. der Stabilität:

Sei x^* Fixp. des dynamischen Systems $\dot{x} = F(x, t)$

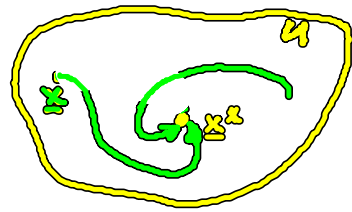
Def.: x^* heißt stabil (oder Lyapunov-stabil),
wenn zu jeder Umgebung U von x^* eine Umgebung V
um x^* existiert, so dass

$$x \in V \Rightarrow \phi(x, t) \in U \quad \forall t \geq 0$$



Def.: x^* heißt asymptotisch stabil, wenn zu x^*
eine Umgebung U ex., so dass

$\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$
 für $0 < t_1 < t_2$ und
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x, t) = x^*$ $\forall x \in U$



(U schrumpft mit wachsendem t auf x^* zusammen,
 d.h. Phasenraumvolumina schrumpfen)

Widerspruch

\longleftrightarrow Liouville'scher Satz für Hamilton'sche Systeme
 (konstantes Phasenraumvol.)

Def.: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn
 Phasenraumvolumina schrumpfen (kontrahieren).

Kriterium für (Lyapunov)Stabilität (lokal):

Wenn x^* stabil ist, dann hat keiner der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(DF)_{x^*}$ einen pos. Realteil.

Beispiel: Fixpunkt a) ($\varphi=0$) des Pendels mit/ohne Reibung

Hinreichende Bed. für asymptot. Stabilität:

Alle Eigenwerte haben negative Realteile

Beispiel: Fixpt. a) des Pendels mit Reibung

Beispiel für Instab.: Fixpt. b) ($\varphi=\pi$)

Allg. System mit $n=2$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda) - A_{21}A_{12} \\ = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} - \lambda(A_{11} + A_{22}) + \lambda^2 = 0$$

Eigenwerte aus der char. Gl.:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A = 0$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

$$= \lambda^2 - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$$

$$\rightarrow \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det A = \lambda_1\lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\text{tr} A \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A})$$

$$\text{tr} A = \sum_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)_* = \text{div } \underline{F}$$

Fallunterscheidung

(a) Stabiler Fokus : $\det A > 0$ $\text{tr} A < 0$
 (Sattelpunkt) $(\text{tr} A)^2 < 4 \det A$

$\lambda_{1,2} = -\lambda_0 \pm i\omega$ $(\lambda_0, \omega > 0)$ gedämpfte Ose.
 im Phasenraum



ellipt. Spirale

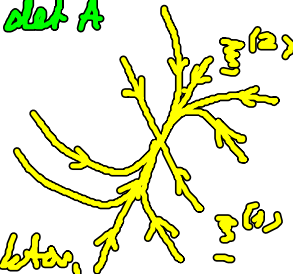
(b) Instabiler Fokus : $\det A > 0$ $\text{tr} A > 0$
 $(\text{tr} A)^2 < 4 \det A$

$\lambda_{1,2} = +\lambda_0 \pm i\omega$ $(\lambda_0, \omega > 0)$ entdämpfte Ose.



(c) stabile Knoten : $\det A > 0$, $\text{tr} A < 0$
 $(\text{tr} A)^2 > 4 \det A$

$\lambda_1 < 0$ } $\in \mathbb{R}$ exp. Zerfall
 $\lambda_2 < 0$



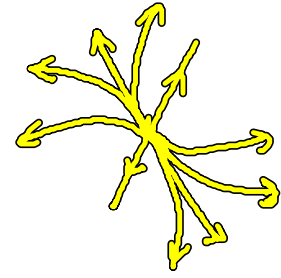
(fast alle Trajektorien nähern sich längs dem Eigenvektor, der zum betragsmäßig kleineren Eigenwert gehört)

(d) instabiler Knoten : $\det A > 0$, $\text{tr} A > 0$

$$(\text{tr} A)^2 > 4 \det A$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$

exp. Entdämpfung

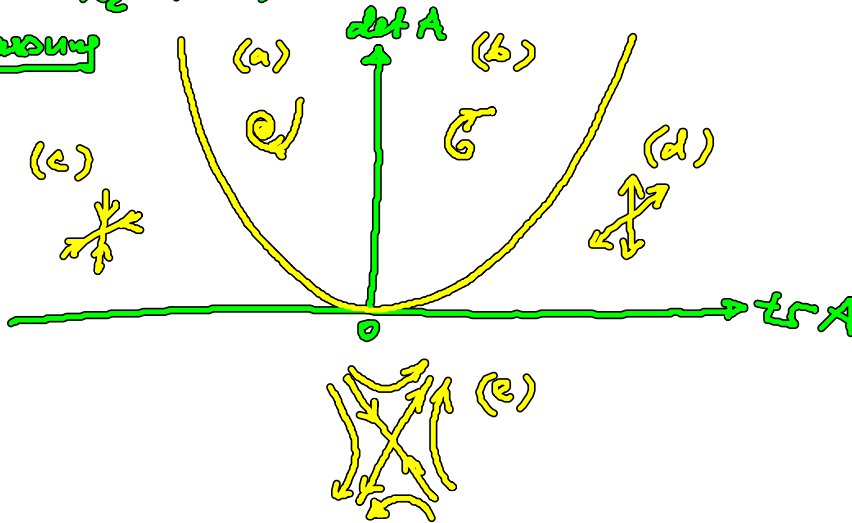


(e) Sattelpunkt : $\det A < 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}$$



Zus. fassung



Grenzen zwischen den 5 Bereichen : entartet Fälle

- lin. Stab. analyse versagt, höhere Terme der Taylorentwicklung um Fixpt. nötig.

$\text{tr} A = 0$, $\det A > 0$: entweder Zentrum



ungedämpfte Osz.

oder schwach stabile / instabile Fokus

- qualitative Änderungen im Verhalten des Flusses möglich

(Bifurkationen = Verzweigungen der Lösungsmannigfaltigkeit)