

English Summary:

1.2.1 Long time behavior of Hamiltonian vector fields

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \Rightarrow \quad \text{tr} A = \text{div} F = 0$$

phase space volume conserved

1.2.2 Dissipative systems

$$\frac{dV_t}{dt} = \Lambda V_t \quad \Rightarrow \quad V(t) = V_0 e^{\Lambda t}$$

↑
dissipative system
phase space volume shrinks

$$\text{div} F = \text{tr} A = \sum_i \text{Re} \lambda_i < 0 \quad (\text{asymptotically stable fixed point})$$

1.3 Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollpar μ ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem krit. Wert μ_c ändern
→ Bifurkation („Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit“)
Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität
- Verknüpft mit Stabilitätswechsel → untersuche lineare Stab. der Fixpte. (für lokale Bif.)

Klassifizierung

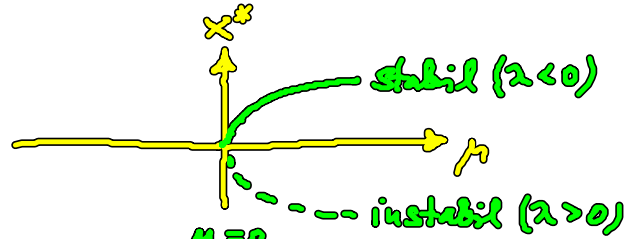
(A) Eigenwert-Null-Bifurkation

$$\lambda < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda > 0$$

$$\det A > 0 \quad \rightarrow \quad \det A < 0$$

(A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

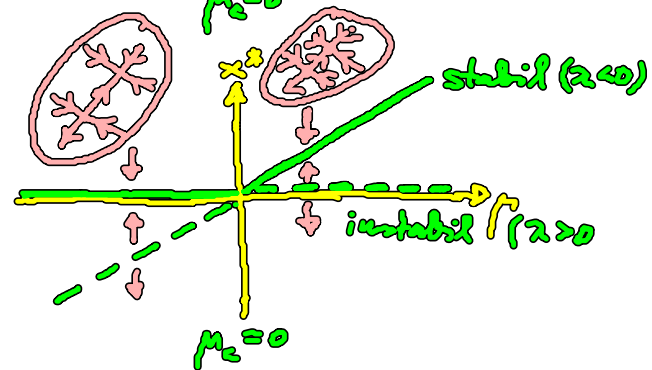


(A2) Transkrit. Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad \delta \dot{x} = (\mu - 2x^*) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$$

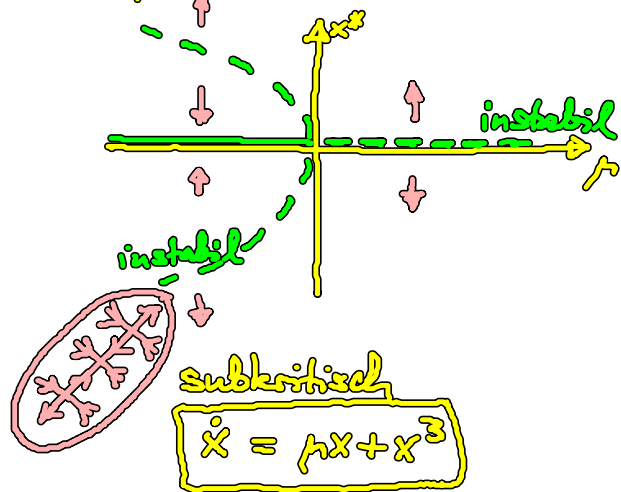
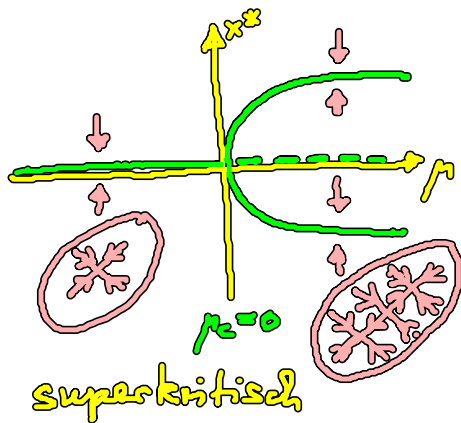
Stab.wechsel bei $\mu = 0$



(A3) Stimmungsgabel-Bifurkation (pitchfork bifurcation)

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad \delta \dot{x} = (\mu - 3x^{*2}) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} \pm \sqrt{\mu} & (\text{für } \mu \geq 0) \\ 0 \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \\ \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \end{cases}$$



$$\dot{x} = \mu x + x^3$$

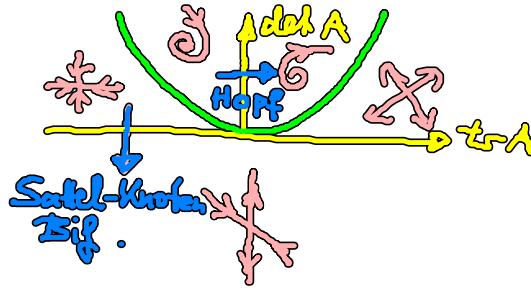
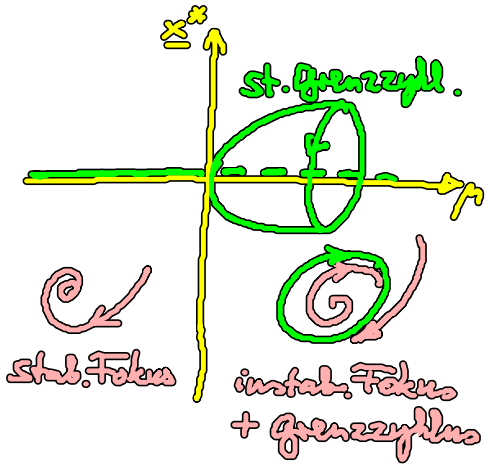
(B) Hopf-Bifurkation (Andronov-Hopf): superkritisch

$\lambda = \lambda_0 \pm i\omega$ mit $\lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$

stabilen Fokus instab. Fokus
 + stab. Grenzzyklus

$n=2$: $\text{tr} A < 0 \rightarrow \text{tr} A > 0$

(Vor.: $\det A > 0$)



mind. $n=2$ nötig!

Hopf-Normalform: generische Taylorentwicklung in der Nähe der Hopf-Bif. (2D-Zentrums-Mannigfaltigkeit)

$\dot{z} = (\lambda + i\omega \mp (1 + i\gamma)|z|^2)z$ $z = x + iy \in \mathbb{C}$

lin. Anteil nichtlin. Anteil \Rightarrow Bifurkation eines Grenzzyklus (limit cycle LC) = period Orbit

$\delta \dot{z} = (\lambda + i\omega) \delta z$

Fixpt. $z = 0$ } $\lambda < 0$: stab. Fokus
 Eigenwert $\lambda + i\omega$ } $\lambda > 0$: instab. Fokus

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \frac{\text{tr} A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr} A}{2}\right)^2 - \det A}$
 $= \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 - \omega^2}$
 $= \lambda \pm i\omega$

Tranf. auf Amplitude r und Phase φ :

$$z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)} \Rightarrow \dot{r}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}re^{i\varphi} = (\lambda + i\omega \mp (1+i\gamma)r^2)re^{i\varphi}$$

Re: $\dot{r} = (\lambda \mp r^2)r \Rightarrow r=0 \text{ oder } r^2 = \pm\lambda \ (\lambda \geq 0)$

Im: $\dot{\varphi} = (\omega \mp \gamma r^2)$ $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$ $\dot{\varphi} = \omega - \gamma\lambda$ Frequ.

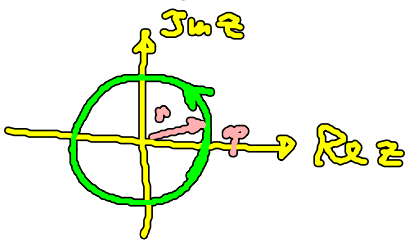
Amplitud.-Phasen-Koppl. $\rightarrow \varphi = (\omega - \gamma\lambda)t$ \downarrow

Lös.: $r=0$ (Fixpt.)

Periode $T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi}{\omega - \gamma\lambda}$

$$z(t) = \sqrt{\pm\lambda} e^{i(\omega - \gamma\lambda)t} \quad \text{für } \lambda \geq 0$$

Stuart-Landau-Oszillator



Im Bif. ($\lambda=0$)

Amplitude $r = \sqrt{\pm\lambda} \rightarrow 0$
 Frequenz $\omega \neq 0$

Lin. Stabilität des LC:

im allgemeinen: Floquet-Theorie

$$\dot{z} = f(z), \quad \text{period. Orbit } z^*(t) = z^*(t+T)$$

$$\delta\dot{z} = Df \Big|_{z^*(t)} \delta z, \quad \text{mit } Df(t) = Df(t+T) \text{ lin. ODE mit period. Koeff.}$$

Lösung $\delta z(t) = \sum_j c_j e^{\Lambda_j t} u_j(t)$ mit $u_j(t) = u_j(t+T)$
Floquet-Mode

Floquet-Exponenten $\Lambda_j \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \Lambda u + \dot{u} = Df u, \quad \delta z(t) = U(t) \delta z(0)$$

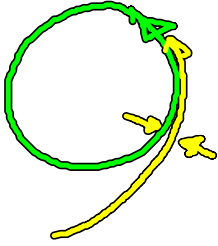
Floquet-Multiplikatoren $\mu = e^{\Lambda T}$ (stabil falls $|\mu| < 1$)
 = Eigenwerte von $U(T)$

hier: analyt. Lösung möglich in r, φ :

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3r^2 & 0 \\ -2\gamma r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ -2\gamma\sqrt{\pm\lambda} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

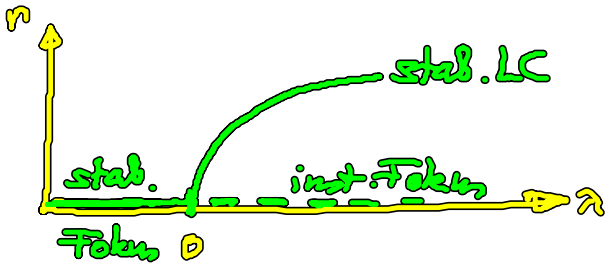
Floquet-Exponenten sind

die Eigenwerte von A : $\lambda^2 + 2\lambda = 0$



$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0 & \text{(long. Beweg. entlang LC} \\ & \text{Goldstone-Mode} \\ -2\lambda & \leq 0 \quad (\lambda \geq 0) \\ & \text{(transv. Floquet-Exp.)} \end{cases}$$

Bifurkationsdiagramm:



supercrit. Hopf-Bif.

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1 + iy)|z|^2)z$$



subcrit. Hopf-Bif.

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1 + iy)|z|^2)z$$