English Summary:

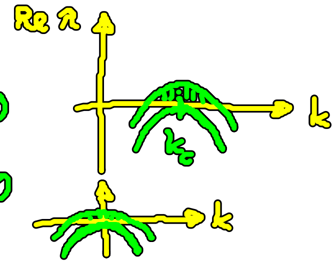
(E) **Bifurcation of spatial patterns** $\dot{q}(x,t) = \underline{F}(\underline{q},\mu) + D\Delta \underline{q}$

linear stab. analysis $\delta \underline{q}(x,t) \sim e^{\lambda t} e^{i\underline{k}\cdot\underline{x}}$: $\lambda(\underline{k})$ dispersion rel.

(E1) **Turing inst.** $\lambda(\underline{k}_c)$, $\underline{k}_c \neq 0$

(E2) **Wave inst.** $\lambda(\underline{k}_c) = \pm i\omega$, $\underline{k}_c \neq 0$

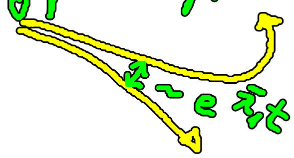
(E3) **Hopf Bif.** $\lambda(\underline{k}_c) = \pm i\omega$, $\underline{k}_c = 0$



1.4 Deterministic Chaos

- sensitive dependence upon initial conditions: Lyapunov exp. $\lambda > 0$
- broad-band power spectral density

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)\, x(t+\tau) \rangle_t \, e^{i\omega\tau} \, d\tau$$



S. Bose et al. / Physics Letters A 195 (1994) 144–150

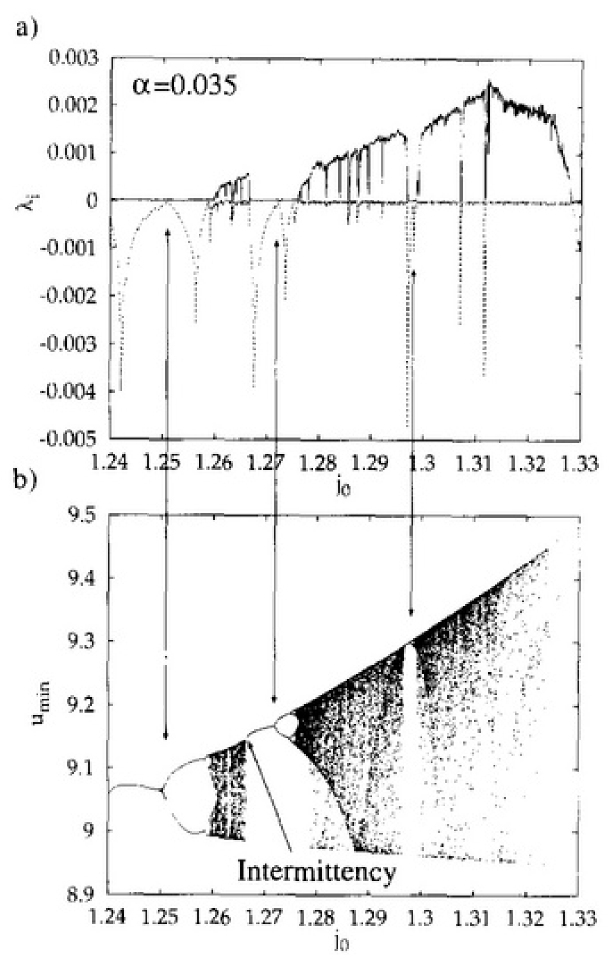


Fig. 8. (a) Lyapunov spectrum, (b) bifurcation diagram for $\alpha = 0.035$

Heterostructure Hot. El. Diode
(semiconductor)

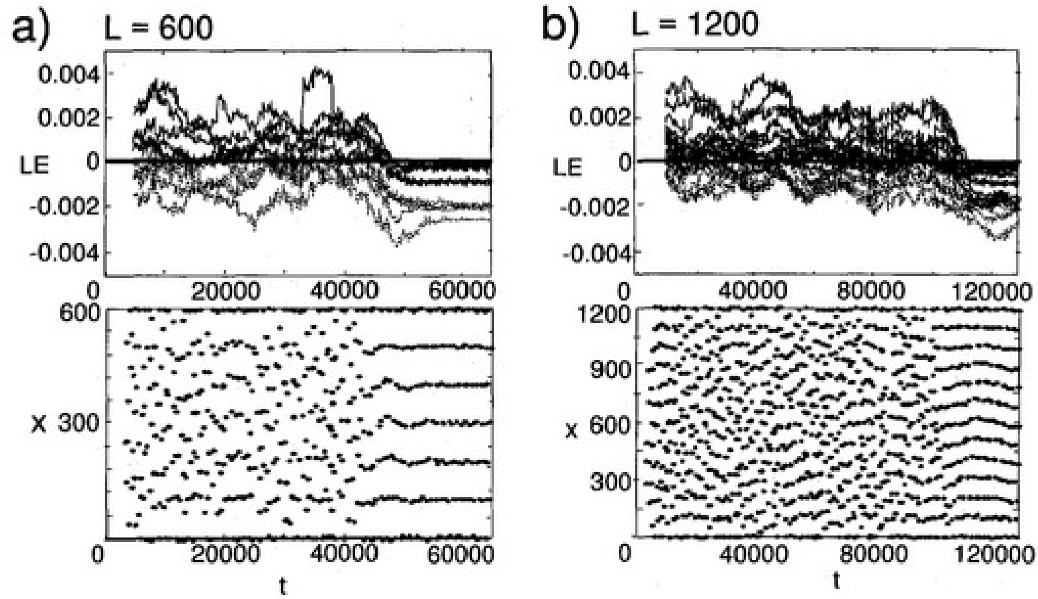


Fig. 2. Transient spatio-temporal chaos for different system sizes (a) $L = 600$ and (b) $L = 1200$. The upper row shows the evolution of the local Lyapunov exponents (LE), and the lower row shows the space–time plot of the maxima of the current density $j = u - a$ ($\alpha = 0.02$, $D = 8.0$, $j_0 = 1.21$, $T = 0.05$).

Reaktions-Diff.-System

extensives Chaos

$\downarrow$

Zahl der pos. Lyapunov-Exp.

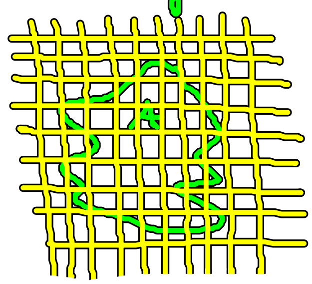
$\sim$ Systemgröße

Quantitative Formulierung der fraktalen Dim. des seltsamen Attraktors

Verallg. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge A im $\mathbb{R}^n$

Sei $N(\varepsilon)$ die Mindestzahl von n-dim. Würfeln mit Seitenlänge ε, um A zu überdecken. Dann ist



$$d := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

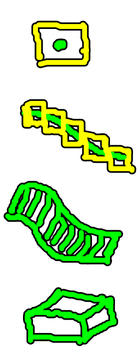
die fraktale (Hausdorff-)Dim. (d.h. $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^d}$)

Beispiel: Punkt $N(\varepsilon) = \text{const.}$ $d=0$

Linie $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}$ $d=1$

Fläche $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$ $d=2$

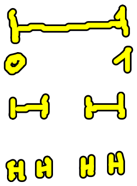
Vol. $N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^3}$ $d=3$



Chaotischer Attraktor im $\mathbb{R}^3$: Volumen $\to 0$

$\Rightarrow d < 3$; aber $d > 2$: z.B. Lorenz-Modell $d \approx 2.05\ldots$

Beispiel: Cantormenge (selbstähnliche Struktur)
hierarchisch, n



$\varepsilon = 1 \; : \; N = 1$

$\varepsilon = \frac{1}{3} \; : \; N = 2$

$\varepsilon = \frac{1}{9} \; : \; N = 4$

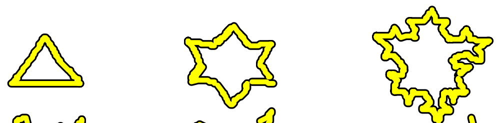
...

$\varepsilon = \frac{1}{3^n} \; : \; N = 2^n$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\ldots$$

Beispiel: Koch's Kurve (Schneeflocke)

Umfang $= 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \longrightarrow \infty$
$\Rightarrow d > 1$



$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = \frac{1}{3}$	$\varepsilon = \frac{1}{9}$	$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
$N = 1$	$N = 4$	$N = 16$	$N = 4^n$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

$1 < d = 1.2618\ldots < 2$
(zwischen Kurve u. Fläche)

analog: Meeresküste

2. Kontrollkonzepte

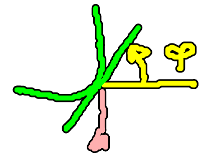
- klass. Kontrolltheorie
- Chaoskontrolle
- Quantenkontrolle

SFB 910: Control of Self-Organizing Nonlinear Systems
Symposien: 29.5.15 / 3.7.15 $15^{00} - 17^{00}$ H 3005

2.1 Offene u. geschlossene Steuerung

Lit.: F. Tröltzsch: Optimal Control of Partial Diff. Eqs. (AMS 2011)
Skript V. Mehrmann: www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS11/Kontrolltheorie
Jan Lunze: Regelungstechnik (Springer Lehrbuch 2008)

Beispiel: Steuerung einer Parabolantenne, die auf einen Satelliten gerichtet ist



Beweg.gl. $\dot{\varphi} = \omega$

$J\dot{\omega} = -r\omega + ku$

Var.: φ Drehwinkel

ω Winkelgeschw.

Par.: J Trägheitsmoment

r Reibungskoeff.

k Verstärk.faktor

Steuervar.: u Spannung

Spannung u ⟶ $\boxed{\text{Verstärker}}$ ⟶ $\boxed{\text{Motor}}$ ⟶ Drehwinkel φ

Ziel: Drehwinkel φ_1 zur Zeit t_1 durch Spannung u

⟹ Finde $u(t)$, so dass eine Lösung des Systems $\varphi(t_1) = \varphi_1$ bei Anf.bed. $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ex.

⟹ Kriterium:
- zeitoptimale Lösung
- energieoptimale Lösung
- ...

- Theor./Mathemat. Grundlagen:

Schema: Eingangsdat. u input ⟶ $\boxed{\text{System}}$ ⟶ Ausgangsdaten y output

↑ interne Dynamik: häufig unbekannt

z.B. Autofahren: Eingänge
- Gasgeben
- Bremsen
- Lenken

Ausgänge:
- Tacho
- Drehzahlmesser

interne Dynamik (Motor, Getriebe) unbekannt

Modell: $\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{y} &= \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}) \end{aligned}}$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

$\underline{u}$: Steuerfkt. (control var., input)
$\underline{x}$: Systemzustand (dynam. var.)
$\underline{y}$: messbare Ausgangsgrößen (output)

$\underline{f}$: funktionaler Zus.hang des Systems
$\underline{g}$: " " der Messung

oft schwierig zu ermitteln, interdisziplinäre Zusammenarbeit

Def. Ein linearer Steuerproblem hat die Form

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{\underline{A}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}(t)\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{\underline{C}}(t)\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}(t)\underline{u}(t) \end{aligned}}$$

$t \in [t_0, \infty)$
$\underline{x}(t_0) = x_0$

Ausgangsgr. (output)

Dabei sind $\underline{x}(t) \in \underline{X}$ (Zustandsraum) $\underline{x}: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$
$\underline{y}(t) \in \underline{Y}$ (Ausgangsraum output) $\underline{y}: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^p$
$\underline{u}(t) \in \underline{U}$ (Eingangsraum input) $\underline{u}: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^m$

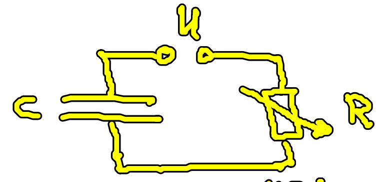
$\underline{X}, \underline{Y}, \underline{U}$ sind Mengen von Funktionen auf $[t_0, \infty)$.

$\to$ Matrizen
$\underline{\underline{A}}(t): [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n,n}$
$\underline{\underline{B}}(t): [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n,m}$
$\underline{\underline{C}}(t): [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{p,n}$
$\underline{\underline{D}}(t): [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{p,m}$

NB: analoges Vorgehen für zeitdiskrete Systeme (Zeit k)
$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\underline{A}}_k \underline{x}_k + \underline{\underline{B}}_k \underline{u}_k$$

Frage: Zus.hang Ausgang $\underline{y}$ und Eingang $\underline{u}$?
$\to$ Transferfkt.

Beispiel: elektrischer Schaltkreis



C Kapazität
R Widerstand

$n=1$
$p=1$
$m=1$

Zustand: $\underline{x}(t) = q(t)$ Ladung an C

Eingang: $\underline{u}(t) = U(t)$ Spannung

Ausgang: $\underline{y}(t) = q(t)$

Zustandsgl.: Kirchhoff-gesetz

$$(\mathrm{I}) \quad \dot{q}(t) = -\frac{1}{RC} q(t) + \frac{1}{R} U(t)$$

Vergleich mit allg. gl. liefert: $\underline{\underline{A}} = -\frac{1}{RC}$, $\underline{\underline{B}} = \frac{1}{R}$

$\underline{\underline{C}} = 1$, $\underline{\underline{D}} = 0$

Lösung der Zustandsgl.

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow q(t) = \exp\left(-\frac{t-t_0}{RC}\right) \underbrace{q(t_0)}_{\text{Anf.Bed.}} + \frac{1}{R}\int_{t_0}^{t} \exp\left(-\frac{t-s}{RC}\right) U(s)\,ds$$

hier: Lösung der Zustandsgl. $\hat{=}$ Ausgangsfkt.

Stabilität: i) asymptot. stabil: Realteile der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ negativ

ii) (schwach) stabil: Realteile der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$ nicht positiv

z.B. (1) Schaltkreis: Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$: $-\frac{1}{RC} < 0$

$\Rightarrow$ asymptot. stabil

(2) Parabolantenne:
$(n=2)$

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{pmatrix} u$$

$m=1$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{r}{J}-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$(-\lambda)\left(-\frac{r}{J}-\lambda\right) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{r}{J} < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (schwach) stabil

Def.: geg. System $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ und Endzustand $\underline{x}_1$.

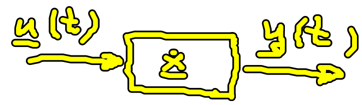
Das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ heißt zur Zeit $t_1 > t_0$ nach $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ <u>steuerbar</u>, wenn es eine Steuerfkt. $\underline{u} \in \underline{U}$ gibt, so dass die Lösung $\underline{x}(t)$ mit dieser Steuerung $\underline{x}_1 = \underline{x}(t_1)$ erfüllt.

Das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ <u>heißt nach $\underline{x}_1$ steuerbar</u>, wenn es zu irgendeiner Zeit t_1 $(t_0 < t_1 < \infty)$ nach $\underline{x}_1$ steuerbar ist.

Wenn für jedes $(t_0, \underline{x}_0)$ und jedes $\underline{x}_1$ das Paar $(t_0, \underline{x}_0)$ nach $\underline{x}_1$ steuerbar ist, so heißt das System <u>vollständig steuerbar</u>.

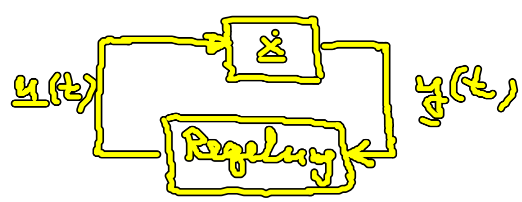
Steuerung vs. Regelung

- Offener Kreis (Steuerung)
  open loop control



$\underline{u}(t) = \underline{g}(t, \underline{x}_0)$

- geschlossener Kreis (Regelung)
  (Rückkopplung,
  feedback control,
  closed loop control)



z.B. Thermostat

$\underline{u}(t) = -\underline{\underline{F}}(t)\,\underline{y}(t)$

Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Das zeitinvariante System $\underbrace{\dot{\underline{x}}(t)}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\underline{\underline{A}}}_{\in \mathbb{R}^{n,n}}\underline{x}(t) + \underbrace{\underline{\underline{B}}}_{\in \mathbb{R}^{n,m}}\underline{u}(t)$, ist vollständig steuerbar.

(ii) Die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{\underline{K}} := \Big(\underbrace{\underset{n\times m}{\underline{\underline{B}}} \quad \underset{n\times m}{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}} \quad \underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}} \quad \cdots \quad \underline{\underline{A}}^{n-1}\underline{\underline{B}}}_{n \text{ Stück}} \Big) \qquad n \times \underbrace{(n\cdot m)}_{\text{Spalten}} \text{ Matrix}$$

hat Rang n

(iii) Ist $\underline{p} \neq 0$ ein Eigenvektor zu $\underline{\underline{A}}^T$,

so gilt $\underline{p}^T \underline{\underline{B}} \neq 0$

(iv) Rang $(\lambda \mathbb{1} - \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = n \qquad \forall \lambda$