

English Summary:

Synchronization of networks

$$\dot{x}_i = \underline{F}(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \underline{H} x_j(t-\tau) \quad x_i \in \mathbb{R}^m, i=1, \dots, N$$

$$\text{necessary cond.: } \sum_{j=1}^N G_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\text{Synchronized sol.: } \boxed{\dot{x}_s = \underline{F}(x_s) + \sigma \underline{H} x_s(t-\tau)} \quad x_s = x_i$$

Master stability fun. (MSF) = largest Lyapunov exponent $\Lambda(\nu)$
 $\nu \in \mathbb{C}$

$$\text{Synchr. sol. is stable} \Leftrightarrow \Lambda(\nu_k) < 0 \quad (k=1, \dots, N-1)$$

\uparrow \uparrow
 Dyn. topol. transverse eigenvalues

$$\nu_N = \sigma = \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij} \quad \text{long. eigenvalue} \cong \text{eigenvector} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Herleitung der Master Stability Fun.

(a) $\dot{x}_i = \underline{F}(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \underline{H} x_j$ $x_i \in \mathbb{R}^m$ (einzelnes Element)

(b) $\dot{x} = \underline{F}(x) + \sigma (\underline{G} \otimes \underline{H}) x$ $x \in \mathbb{R}^{mN}$ (komplettes Netzwerk)

(c) Linearisierung um den synchr. Zustand $\delta x = x - x_{\text{sync}} \in \mathbb{R}^{mN}$

$$\delta \dot{x} = \underline{JF}(x_{\text{sync}}) \delta x + \sigma (\underline{G} \otimes \underline{H}) \delta x$$

(d) Diagonalisierung von Kopplungsmatrix $\underline{G} \begin{pmatrix} \text{Ann. } \sum_j G_{ij} = \text{const.} \\ \sum_j \tilde{G}_{ij} = \sigma \end{pmatrix}$

$$\delta \dot{x}_i = \underline{JF}(x_{\text{sync}}) \delta x_i + \nu_k \underline{H} \delta x_i \quad x_1 = \dots = x_N \in \mathbb{R}^m$$

für Eigenwerte ν_k , $k=1, \dots, N$ ($\nu_N = \sigma$ long. EW)

(e) Verwende $\nu = \alpha + i\beta$ als Parameter und berechne $\Lambda(\nu)$ (MSF)

(f) Test, ob $\Lambda(\nu_k) < 0$ für alle ν_k von geg. \underline{G}
 für Stab. der synchr. Lös. ($k=1, \dots, N-1$)
 transv. EW

NB: $\Lambda(\nu_N) > 0$ chaot. sync. Lös.

$\Lambda(\nu_N) = 0$ period. sync. Lös.

Verallgemeinerung auf zeitverzög. Kopplung $\Rightarrow x_j(t-\tau)$
 $\left. \begin{matrix} x(t-\tau) \\ \delta x(t-\tau) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{in} \\ \text{Koppl.} \\ \text{term} \end{matrix}$

4.3.3 Stabilität der synchr. Lös. für großes τ

V. Flunkert, S. Yandank, T. Dahms, E. Schöll: PRL 105, 254101 (2010)

$\Lambda_{\max}(\sigma) > 0$ chaot. Dyn.
 ≤ 0 period. Dyn. / Fixpt.

$\Lambda_{\max}(\nu_k) < 0$ Sync stabil } $k=1, \dots, N-1$
 > 0 " instabil } (ν_{\max})

Struktur der MSF für große Delay:

- $\Lambda_{\max}(re^{i\psi})$ ist rot. symm.: $\Lambda_{\max}(r)$
- $\Lambda_{\max}(0) < 0$ und monoton wachsend mit r ,
 $\Lambda_{\max}(r)$ wird positiv bei $r=r_0$
oder
 $\Lambda_{\max}(0) > 0$ und dann überall konstant $\forall r$

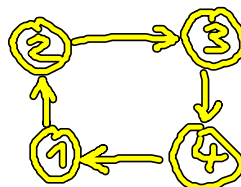
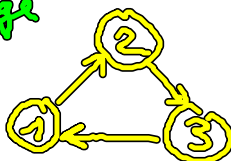
Universelle Klassifikation von Netzwerken mit großem τ

class	chaot. sync. Dyn. ($r_0 < \sigma $)	nichtchaot. sync. Dyn. ($r_0 > \sigma $)
(A) $ \nu_{\max} < \sigma $	sync. stabil $\Leftrightarrow \nu_{\max} < r_0$	sync. stabil
(B) $ \nu_{\max} = \sigma $	sync. instabil	sync. stabil
(C) $ \nu_{\max} > \sigma $	sync. instabil	sync. stabil $\Leftrightarrow \nu_{\max} < r_0$

↑
 Heibigenthal et al., PRL 107, 234102 (2011)

Klasse B und C-Beispiel

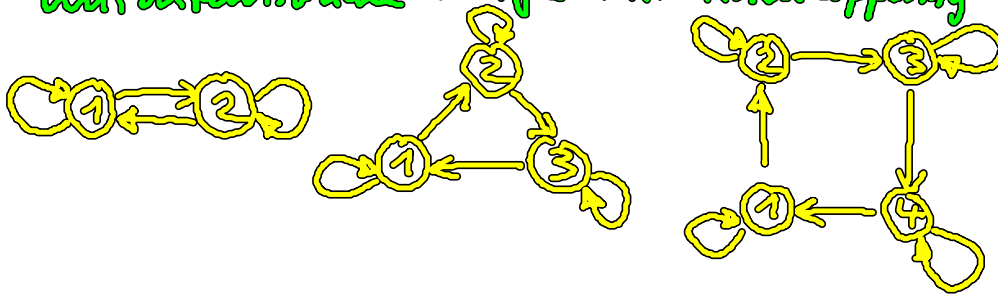
- unidirekt. Ringe



- Netzwerke mit Zeilensumme $\sigma = 0$

Klasse A :

- unidirektionale Ringe mit Rückkopplung



- bidirektion. Ringe
- all-to-all coupling
- Netzwerke, die nur excit. (attraktiv) oder nur inhib. (repulsiv) gekoppelt sind (Klasse A oder B)

4.4 Netzwerke aus Hopf-Normalformen

C.U. Choe, Dahms, Hövel, Schöll: PRE 21, 025205(R) (2010)

- ausgehend von S+1 nun N gekoppelte Hopf-Normalformen

$$\dot{z}_j = (\lambda + i - (1 + i\mu) |z_j|^2) z_j + \sigma \sum_{n=1}^N G_{jn} (z_n(t-\tau) - z_j(t)) \quad (\text{I})$$

$\omega=1$ ↑ Superkrit.

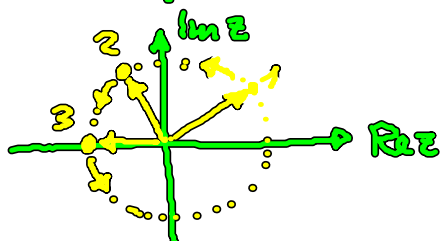
Kopplungsstärke $\sigma = K e^{i\beta} \in \mathbb{C}$

Kopplungsmatrix \subseteq

Oszillatoren $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$

4.4.1 Cluster-Synchronisation

Verallgemeinerte Synchronisationszustände :



Merry-go-round

- Wir suchen D_m -invariante Zustände, für die gilt :

$$\dot{r}_j = 0 \quad (\text{konst. Amplitude})$$

$$\dot{\varphi}_j = \Omega_m \quad (\text{gemeinsame konst. Frequ.})$$

Annahme : gleiche Amplitude aller Ose., konst. Phasenunterschied

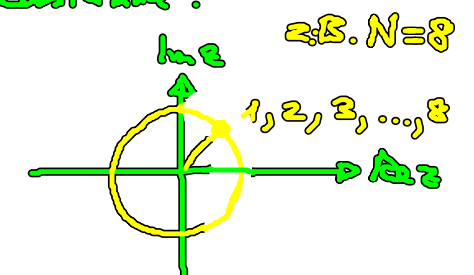
$$\boxed{\begin{aligned} r_j &= r_{0,m} \\ \varphi_j &= \Omega_m t + j \frac{2\pi m}{N} \end{aligned}} \quad (\text{II}) \quad m \in \mathbb{N}$$

Index m klassifiziert mögliche Clusterzustände:

$m=0$ Synchrone in-phase Lösung
(zero-lag)

$$r_j = r_{0,0}$$

$$\varphi_j = \Omega_0 t$$

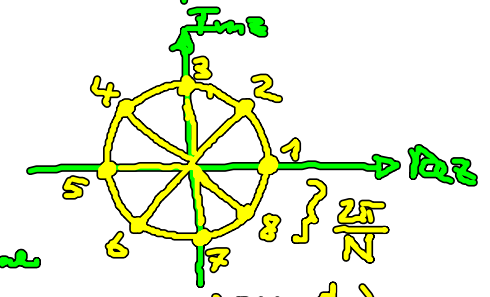


$m=1$ splay state

$$r_j = r_{0,1}$$

$$\varphi_j = \Omega_1 t + j \frac{2\pi}{N}$$

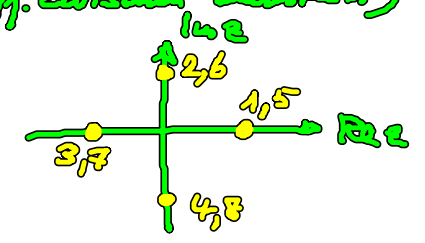
jeder Osz. hat andere Phase, aber immer gleichen Abstand zum Nachbarn (next-to-neighbor) Kernszell



Bem.: für $N=2$ entspricht Splay-Zustand der gegenphasigen Lösung $z_1 = -z_2$

$m > 1$ Cluster-Zustände (in Phase innerhalb der Cluster, konst. Phasendiff. zwischen Clustern)

Zahl vorhandener Cluster M
geg. durch kleinstes gemeins. Vielfaches von m und N
geteilt durch m



$$M = \frac{\text{LCM}(m, N)}{m} \quad \text{Least Common Multiple}$$

Beispiel: $N=8, m=2 \Rightarrow M = \frac{\text{LCM}(8, 2)}{2} = \frac{8}{2} = 4$

Bestimmen der invar. Lösungen von (I) durch Einsetzen von (II) in (I):

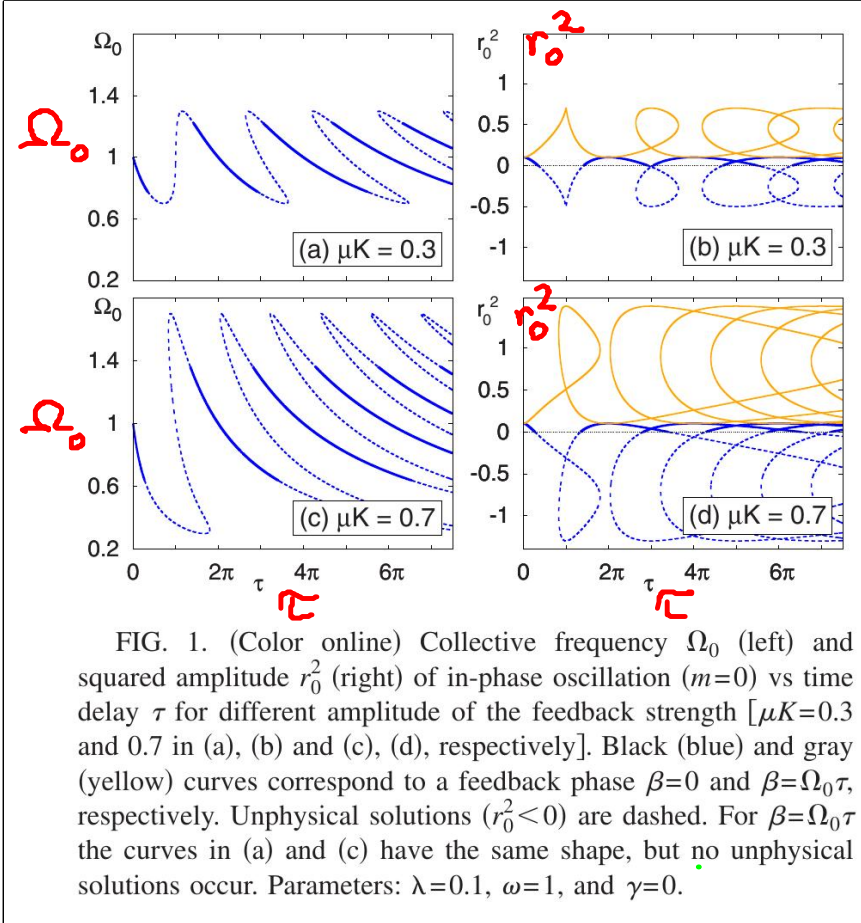
$$r_{0,m}^2 = \left[2 - \left(\sum_{j=1}^N G_{jn} \right) K \cos \beta + K \sum_j G_{jn} \cos(\phi_{jn}) \right]$$

$$\Omega_n = 1 - \mu r_{0,m}^2 - \left(\sum_{j=1}^N G_{jn} \right) K \sin \beta + K \sum_j G_{jn} \sin(\phi_{jn})$$

$$\phi_{jn} = \beta - \Omega_n t + (n-j) \frac{2\pi n}{N}$$

$$\sum_j G_{jn} = \text{const.} = \mu$$

Lösung für in-phase Zustand ($m=0$):



orange $\beta = \Omega_0\tau$
 blau $\beta = 0$
 $\sigma = 0.3$
 $\sigma = 0.7$

4.4.2 Stabilität der Lösungen

bisher: nur Existenz

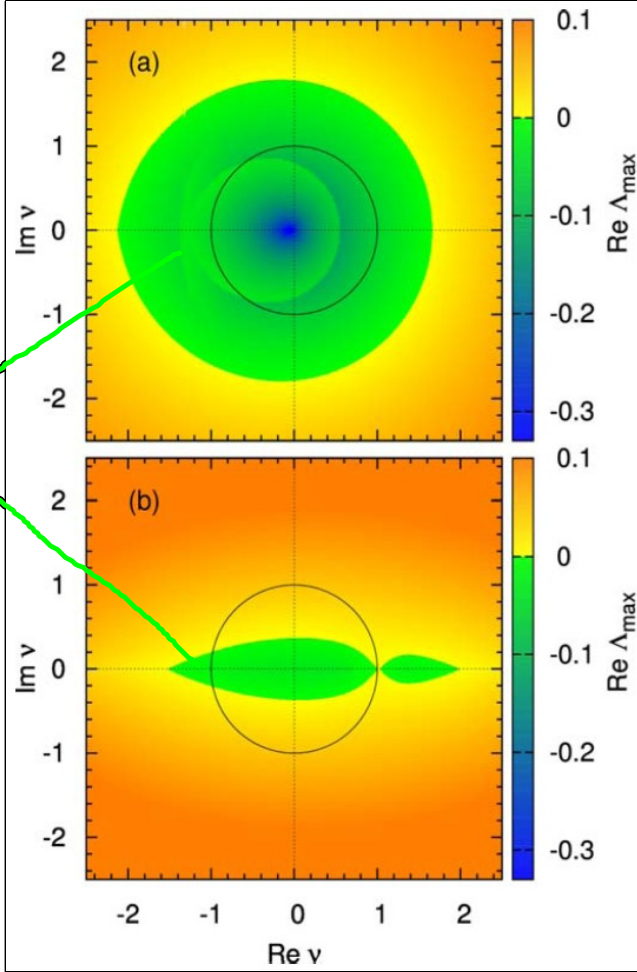
jetzt: Stab. berechnen mit MSF = größter Lyapunov-Exp. $\lambda_{\max}(v)$

v : transv. EW der Kopplungsmatrix G

- Hier λ anstelle von K und τ , da die synchr. Mannigfaltigkeit von K und τ abhängt.
- Berechnung von λ_{\max} hier analyt. möglich, weil Jacobi-Matrix für Stuart-Landau-Osc. nicht zeitabh. ist

$m=0$ (in phase), $\beta=0$, $\lambda=0.1$, $\gamma=0$
 sync

stab.



Schwarzer Kreis: unidirekt. Ring
 $v_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$ auf dem Einheitskreis

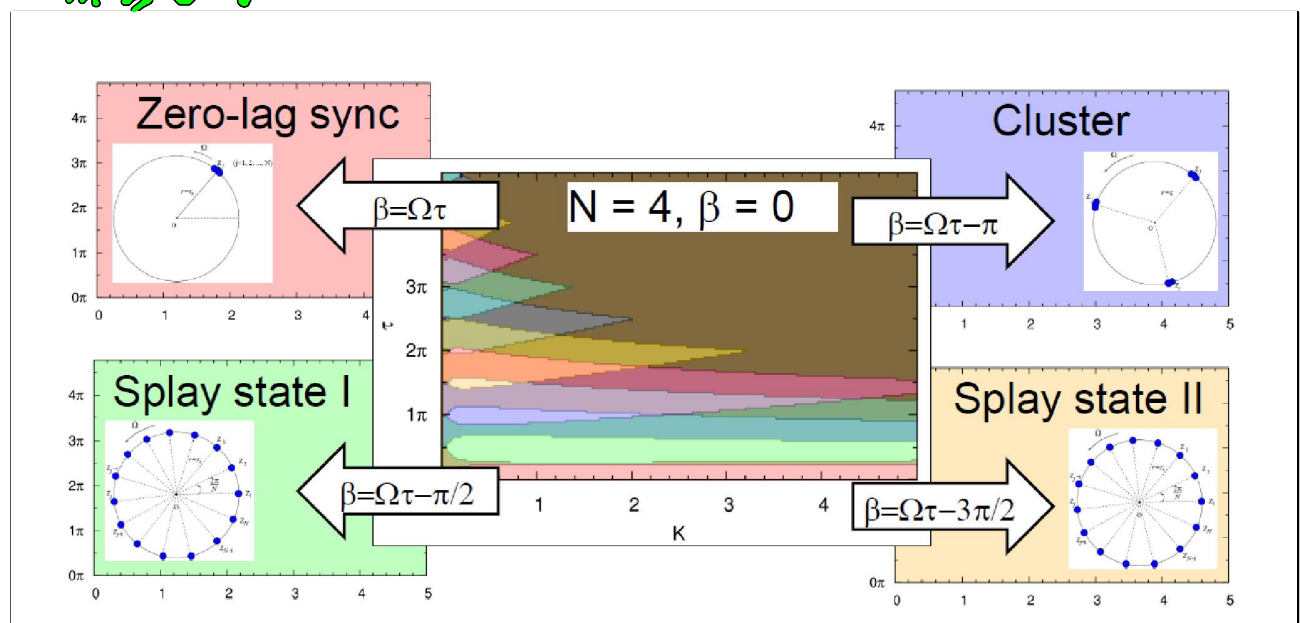
$\sigma = K\mu = 0.3$
 $\tau = 2\pi$

synchr. Lös. stabil

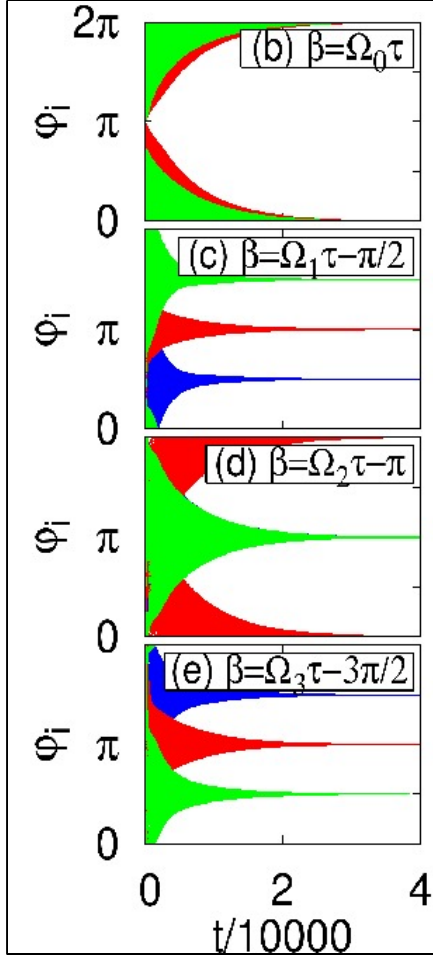
$\sigma = K\mu = 0.08$
 $\tau = 0.52\pi$

synchr. Lös. instabil
 (v_k können außerhalb stab. Bereich liegen)

(K, τ)-Ebene für unidirektionalen Ring
 $m \geq 0$:



$\beta = \Omega_m \tau - \frac{2\pi m}{N}$ sicherst stab. in der ganzen (K, τ)-Ebene



$\tau = 3\pi$, $\sigma = 0$
 φ_i relativ zu φ_1
 in Phase

splay

cluster

antisplay

Maß für Synchronisation (für in-phase)
 Kuramoto - Ordnungsparameter

$$R = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j}$$

$|R| = 1$ in-phase

$|R| \approx 0$ Desynchron. oder aber z.B. splay state