

English Summary :

Networks of Hopf normal forms

$$\dot{z}_j = (\lambda + i - (1 + i\gamma)|z_j|^2)z_j + \sigma \sum_{n=1}^N g_{jn}(z_n(t-\tau) - z_j(t))$$

$$r_j = r_{0,n}$$

$$\varphi_j = \Omega_n t + j \frac{2\pi n}{N}$$

$m=0$ sync in-phase \circ $z_j(t) = r_j e^{i\varphi_j} \in \mathbb{C}$

$m=1$ splay state $\#$ $\sigma = \kappa e^{i\beta} \in \mathbb{C}$

$m>1$ cluster sync \dagger

$|R|=1$ sync Kuramoto order par.

$$R = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j}$$

$$|R| \neq 0$$

For appropriate β stabilize desired sync state $m \in \mathbb{N}_0$.

4.5 Synchronisation in neuronal Networks

Lit.: Lehnert et al, Europhys Lett. 96, 60013 (2011)
Keene et al, Euro. Phys. J. B 85, 407 (2012)

Ziel: Vergleich von Desynchronisationsübergängen in Netzwerken aus Typ-I u. Typ-II ausgehenden Knoten

Motivation: Synchronisation im Gehirn:

- konstruktiv in vielen kognitiven Prozessen
- pathologisch in Epilepsie oder Parkinson

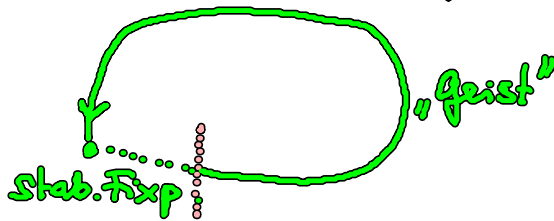
Aregbarkeit

Beispiel: Neuronale Systeme, chem. Reaktionen, Ionenkanäle, Laser, Klimadynamik

System hat stabiles Fixpt., ist aber im Parameterraum nahe einer Bifurkation ins oscillatorische Regime.

• Bei kleinen Störungen über eine Schwelle folgt das System dem „Geist“ des Grenzzyklus:

⇒ Emission einer Spike ⇒ Rückkehr in den stab. Fixpt. (Refraktärphase)



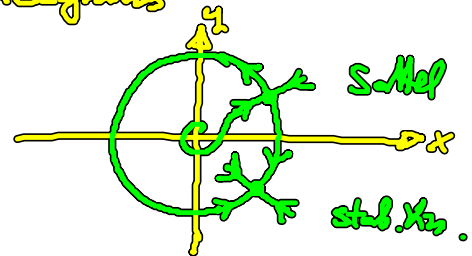
Typ-I Aregbarkeit

- Amplitude $\neq 0$
- Frequenz $\rightarrow 0$

⇒ Sattel-Knoten-Bif. auf einem Grenzzyklus

z.B.: SNIPER

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x^2-y^2) + y(x-b) \\ \dot{y} &= y(1-x^2-y^2) + x(x-b) \end{aligned}$$



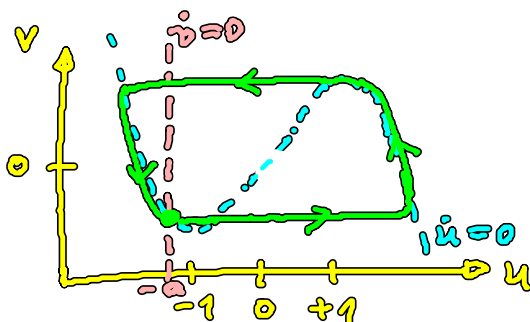
Typ-II Aregbarkeit

- Amplitude $\rightarrow 0$
- Frequenz $\neq 0$

⇒ Hopf-Bifurkation

Beispiel Fitz Hugh - Nagumo (FHN)

$$\begin{cases} \epsilon \dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v \\ \dot{v} = u + a \end{cases}$$



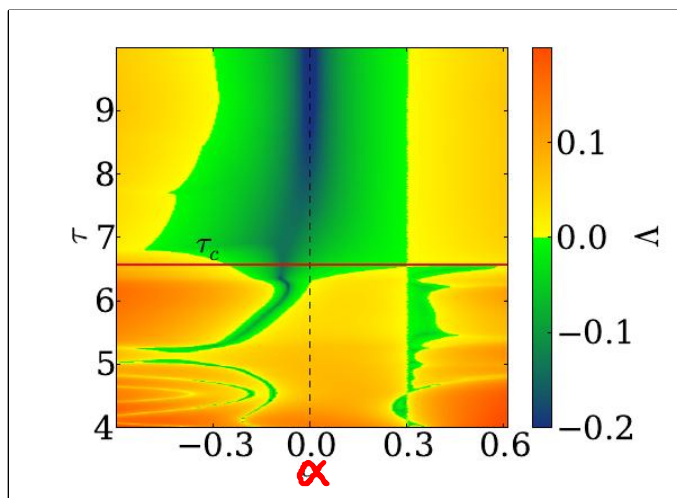
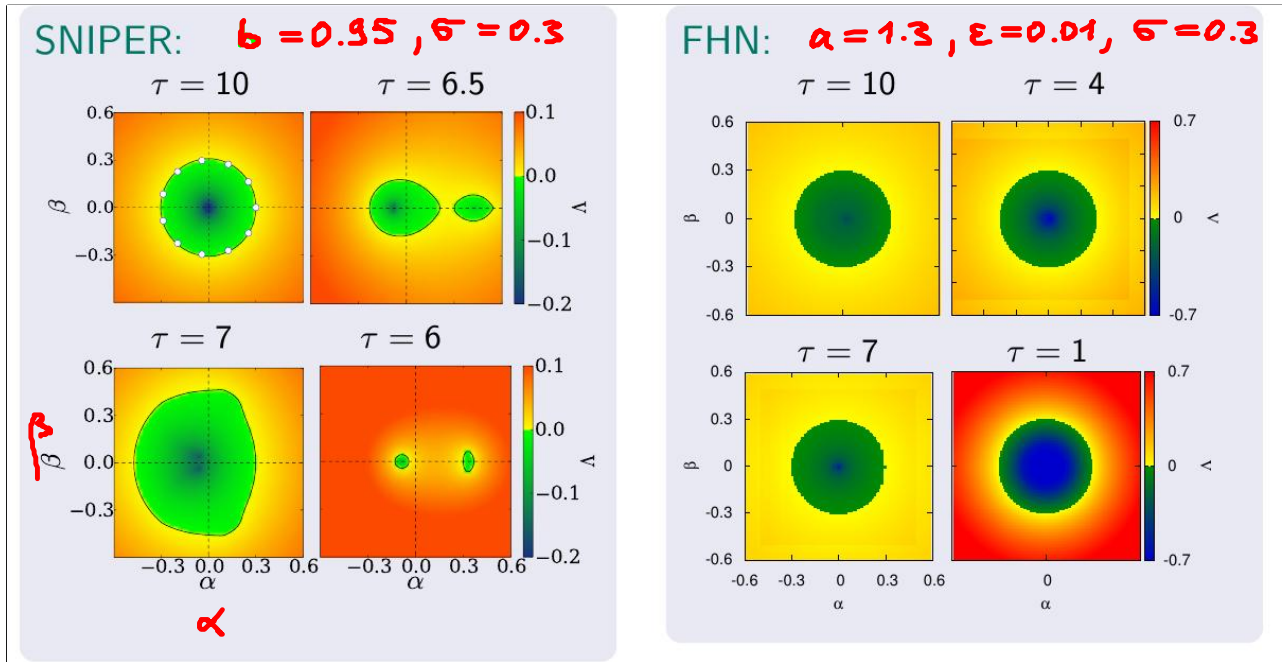
- u Aktivator (schnell) Membranpot.
- v Inhibitor (langsam)
- ϵ Zeitskalenpar. (klein $\epsilon \approx 0.01$)
- a Bifurkationspar.

- $|a| > 1$ stab. Fixp. ⇒ anregbarer Zustand
- $|a| = 1$ Hopf-Bif.
- $|a| < 1$ stab. Grenzzyklus ⇒ oscillator. Zustand



Netzwerke aus anregbaren Knoten

Stabilität der Synchronisation \Rightarrow Master stability test.
 (obwohl Einzelsystem anregbar, oszilliert das Netzwerk wegen der zeitverzögerten Kopplung periodisch.)



SNIPER, $\sigma = 0.3, b = 0.95$

$\beta = 0$

Stabilitätsregionen

a) stabile Region = verkleinerter Einheitskreis

- FHN
- SNIPER für große τ

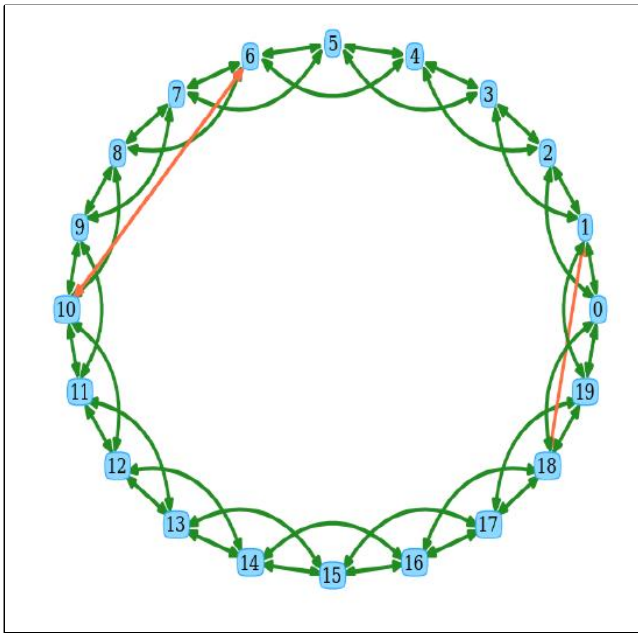
b) Stabilitätsinnern

- SNIPER für kleine τ

Desynchronisation in Small-World-Netzwerken (SW)

Betrachte Variation eines SW

- reguläres Netzwerk von exzitator. gekoppelten Knoten ($G_{ij} \geq 0$)
- k Kopplungreichweite in regulärem Ring
- bidirektionale Links
- zusätzl. inhibitorische ($G_{ij} < 0$) Links mit Wahrsch. p
(kein rewiring)

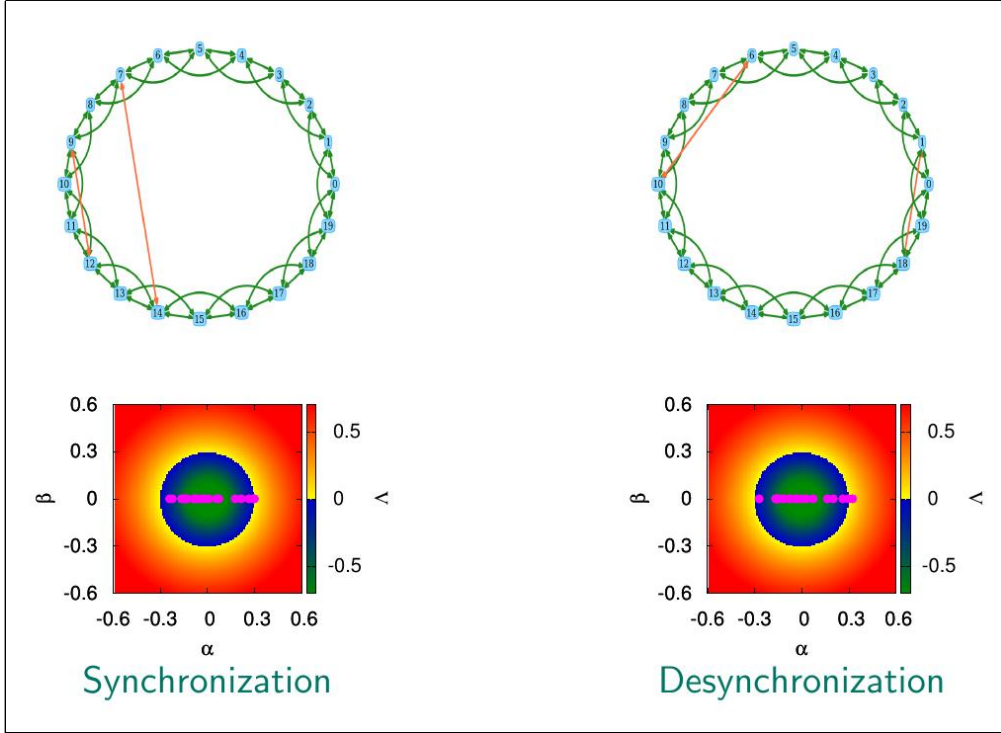


$$k=2$$

grün: exzitator.

rot: inhibitor. (Langreich-
weitig)

- Zufallsprozess: verschiedene Realisierungen können unterschiedl. Stabilitätseigenschaften haben

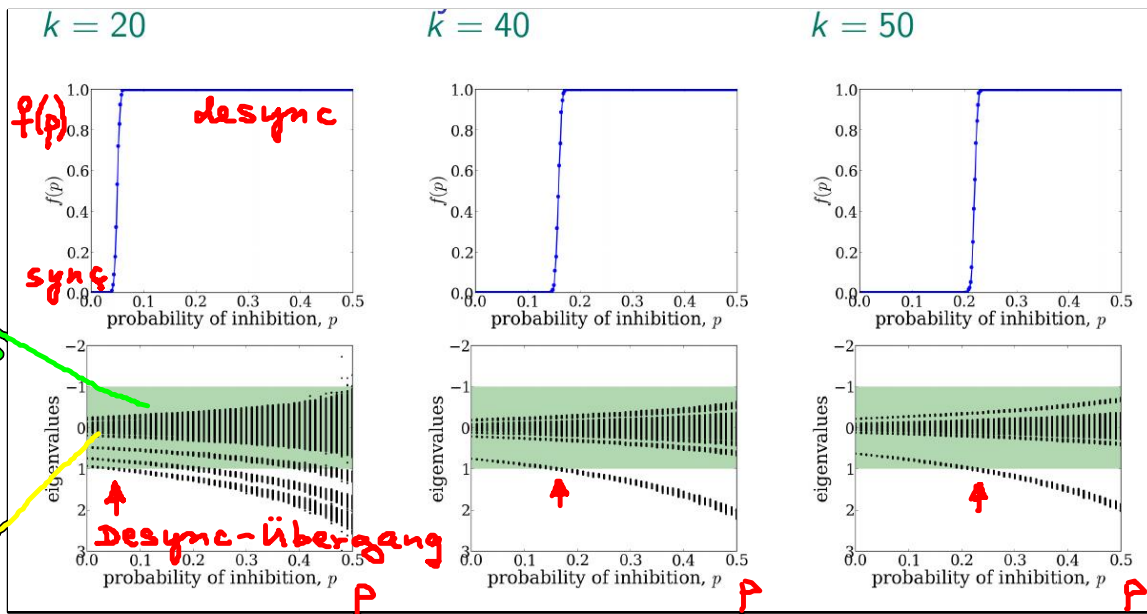


$N=20$
 $k=2$
 $p=0.05$

FHN

Betrachte $f(p) = \frac{\# \text{ desynchronisierter Realisierungen}}{\# \text{ aller Realisierungen}}$

Fall a) Stabiler Bereich \Leftrightarrow rekaliertes Einheitskreis



SNIPER
 $b=0.95$
 $\sigma=0.3$
 $N=200$

stab. Bereich der MSF (grün)

Eigenwertspektrum der Kopplungsmatrix

Desync-Übergang

Inhibition verursacht Übergang in desynchron. Zustand

Fall b) Stabilitätsinseln

$k = 20$

$k = 40$

$k = 50$

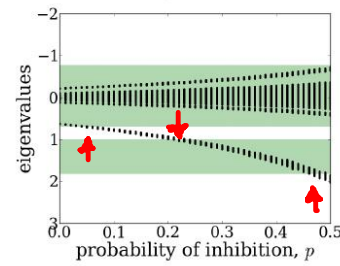
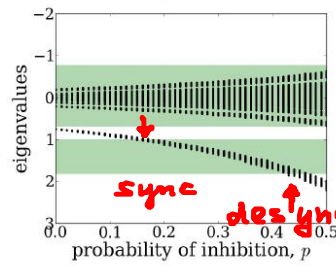
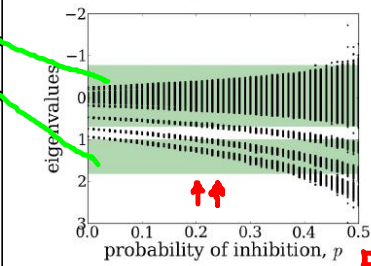
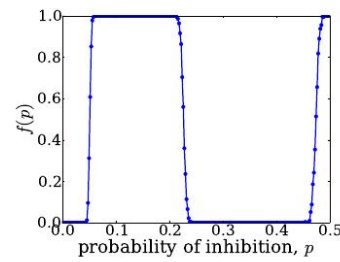
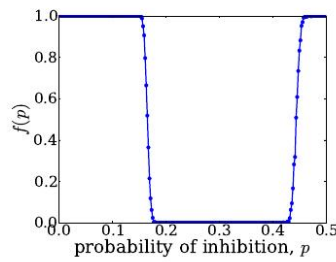
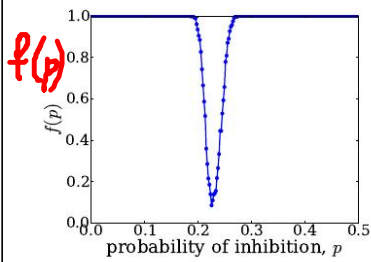
SNIFER

$\tau = 6.5$

$\sigma = 0.3$

$b = 0.95$

$N = 200$



stab. inakt

- Mehrfache Übergänge zwischen Syncron. u. Desyncr.
- Synchronisation: Instabile Regionen müssen zu Lücken im Eigenwertspektrum passen
 ⇒ hängt empfindlich von exzitator.-inhibitor. Balance ab

Zusammenfassung:

Anregbarkeit	Bif.	hier betracht. Beispiel	stabiler Bereich des MSF	Desynchronis.-Übergänge
Typ-I	SNIFER	SNIFER-Normalform	τ klein: Stab.inakt τ groß: instab. Einheitskreis	mehrfache Übergänge zw. Sync. und Desync
Typ-II	Hopf	FHN	restabilisierter Einheitskreis	Inhibition führt zu einem Übergang zu Desync.