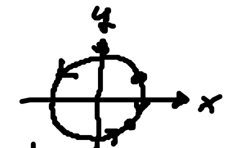
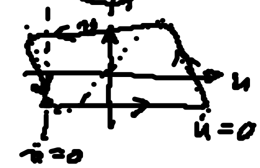
English Summary:
Synchronization in neuronal networks

Networks of excitable systems
Excitability type I: SNIPER $\boxed{\begin{aligned}\dot r &= r(1-r^2)\\ \dot\varphi &= b - r\cos\varphi\end{aligned}}$

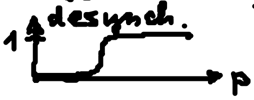


" " II: FitzHugh-Nagumo $\boxed{\begin{aligned}\varepsilon\dot u &= u - u^3/3\\ \dot v &= u + a\end{aligned}}$



FHN

Desynchronization in small-world networks with additional (p) inhibitory links



SNIPER with small τ: stability island

depending upon exc.-inh. balance: multiple sync-desync transitions

5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen

Bisher: determinist. dynam. Systeme
jetzt: stochast. dynam. Systeme

5.1 Rauschinduzierte Oszillationen und Kohärenzresonanz

Stochast. Prozess

Zeitentwicklung einer Zufallsvar. $X(t)$
($\leftrightarrow$ im thermodyn. Gleichgewicht zeitunabh. Wahrscheinl.-verteilung durch Jaynes'sches Prinzip der vorurteilsfreien Schätzung geg.: verallg. kanon. Verteilung $p_i = Z^{-1} e^{-\lambda_\nu M_i^\nu}$, M_i^ν Zufallsvar.)

Verbundwahrscheinl. zeitabhängig: $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$
Realisierungen $x_1, x_2, x_3 \dots$ von $X(t)$

Markoff-Prozess

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2, x_3, t_3, \dots) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(x_2, t_2; \dots)}$$ bedingte Wahrscheinl.

$$\overset{!}{=} p(x_1,t_1 \mid x_2,t_2)$$ hängt nur von der jüngsten Bed. ab

$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots$ kein Gedächtnis!

Langevin-Gleichung

fluktuierende stoch. Kraft $\xi(t)$ (Rauschen, noise)

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = \underbrace{-\gamma \dot{x}}_{\text{Reibung}} + \underbrace{\xi(t)}_{\text{Rauschen}}$$

Gauß'sches weißes Rauschen

$\langle \xi(t) \rangle = 0$ $\qquad \langle \dots \rangle$ = statist. Mittelung

$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$ unkorrel.

zentraler Grenzwertsatz: unkorrel. Zufallsvar. gehorchen einer Gaußverteilung

Autokorrel.fkt.

$$\Psi(s) := \big\langle (x(t)-\langle x\rangle)(x(t+s)-\langle x\rangle) \big\rangle$$

ergod. System: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\Psi(s) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, x(t)\,x(t+s) \qquad (\text{hier } \langle x\rangle = 0)$$

Fourier-Trafo: $\hat{x}(\omega;T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} dt\, e^{i\omega t}\, x(t)$ in $t \in [-T,T]$

spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

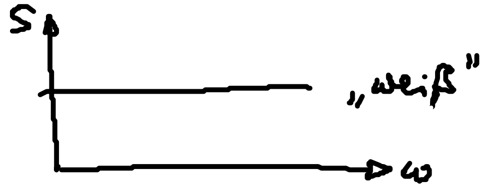
$$S(\omega) := \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega;T)|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)\,x(t+s)\rangle\, e^{i\omega s}\, ds}$$

Wiener-Khinchin-Theorem

Gauß'sches weißes Rauschen $\xi(t)$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \delta(s)\, e^{i\omega s}\, ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$



Rauschinduzierte Oszillationen

1. Beispiel: System knapp unterhalb einer Hopf-Bif.
Van der Pol-Osz. (1926, el. Stromkreis)

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t)\end{aligned}}$$

nichtlin. Osz.

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi(t)$$

D Rauschintensität
$\xi(t)$ gauß'sches weißes Rauschen

$D = 0$: Fixpkt. $x = y = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}\, A = \varepsilon$, $\det A = \omega_0^2$

$\varepsilon = 0$ Hopf-Bif., $\varepsilon < 0$ stabiler Fokus
$\varepsilon > 0$ instab. Fokus + LC

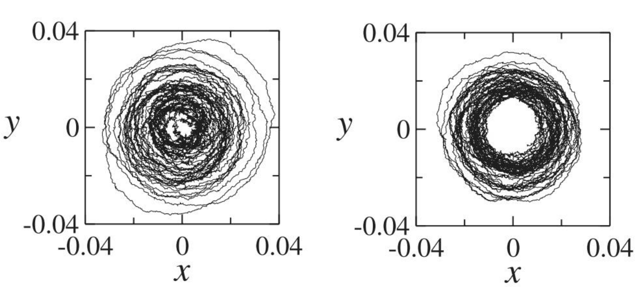
hier: $\varepsilon = -0.01$, $\omega_0 = 1$, $\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \pm i\omega_0$

$\Rightarrow$ keine determinist. Osz.

aber <u>rauschinduzierte</u> Osz. ($D \neq 0$)

Lit. Janson, Balanov, Schöll: PRL 93, 010601 (2004)
Balanov, Janson, Schöll: Physica D 199, 1 (2004)
Schöll, Balanov, Janson, Neiman: Stoch. Dyn. 5, 281 (2005)

SFB-Symp. Fr. 3.7. $15^{00} - 17^{00}$ H 3005: A. Neiman
"Noise"



(a) (b)

rauschinduz. Osz. (VdP)

Fig. 1. Numerically simulated phase portraits of noise-induced oscillations of the Van der Pol system at $\omega_0 = 1$, $\varepsilon = -0.01$, $D = 0.003$: (a) without feedback $K = 0$; (b) with feedback $K = 0.2$, $\tau = T_0$. In both cases the system was integrated during 300 time units.

2. Beispiel : anregbares System (Typ II)
FitzHugh-Nagumo-Modell (Neuron)

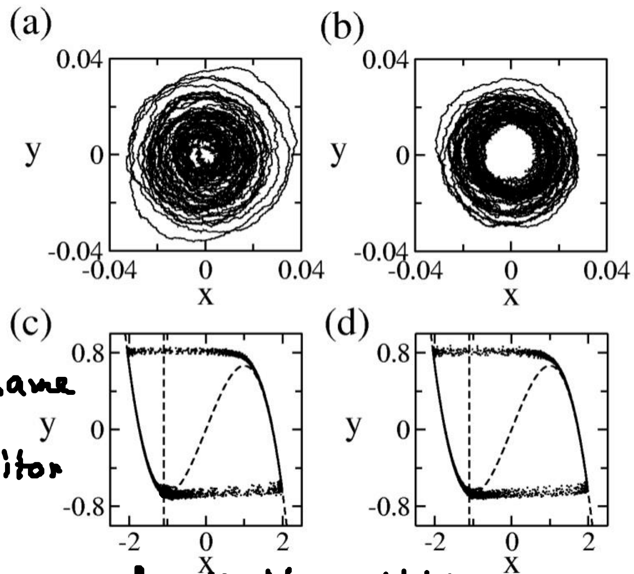
$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a \qquad + D\xi(t) \end{aligned}}$$

Zeitskalentrenn. $\varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon = 0.01$)
Anreg.schwelle a ($a = 1.1$)

$D = 0$: Fixpkt. $x = -a$, $y = -a - \frac{a^3}{3}$ stabiler Knoten für $a > 1$ (anregbar)
(hier nicht betrachtet: $a < 1$ instab. Fixpkt. + LC)

ohne Kontrolle mit Kontrolle

langsame Var., Inhibitor



schnelle Var., Aktivator

VdP

FHN
$D \neq 0$: rauschinduz. Osz. (spiking von Neuronen)

FIG. 1. Phase portraits of noise-induced motion: (a),(b) Van der Pol oscillator at $D = 0.003$; (c),(d) FitzHugh-Nagumo system at $D = 0.09$ (the dashed lines denote the null isoclines), (a),(c) $K = 0$; (b),(d) $K = 0.2$, $\tau = T_0$.

Kohärenzresonanz (Pikovsky, Kurths: PRL 78, 775 (1997))
Hu, Ditzinger, Ning, Haken: PRL 71, 807 (1993)
(stoch. Resonanz ohne ext. treibende period. Kraft)

konstruktiver Einfluss von Rauschen:

- Regularität („Kohärenz") der rauschinduz. Osz. am größten für endl. Rauschintensität $D_{opt} > 0$.

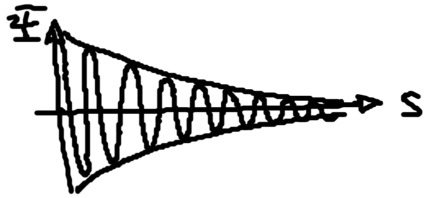
- Maß für Regularität:

Korrelationszeit $$t_{cor} = \frac{1}{\underbrace{\Psi(0)}_{\text{Varianz}}} \int_0^\infty |\Psi(s)|\, ds$$

Autokorrel.fkt. $\Psi(s)$

(für lin. stoch. Prozesse $\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + \xi(t)$)

$$\Psi(s) = \Psi(0)\, e^{-\lambda s} \cos \omega_0 s$$



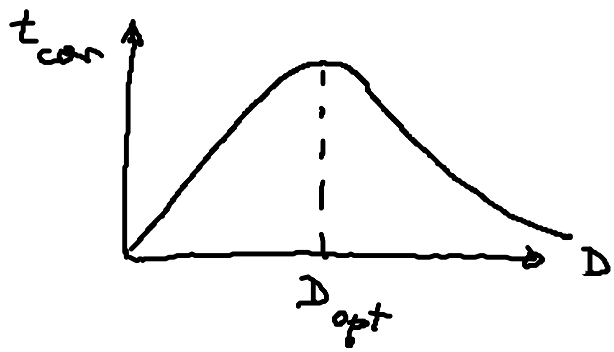
$$t_{cor} = \int_0^\infty e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s|\, ds$$

Approx.: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi = \frac{2}{\pi}$ Füllfaktor für $\lambda \ll \omega_0$

$$t_{cor} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, ds = \frac{2}{\pi \lambda}$$

$$\Rightarrow \Psi(s) = \Psi(0)\, e^{-\frac{2}{\pi}\frac{s}{t_{cor}}} \cos(\omega_0 s)$$

(exp. abklingende Korrelation)



<u>Kohärenzresonanz</u>

z.B. FHN (nichtlinear)
anregbar $|a| > 1$

<u>2 Zeitskalen</u>, die unterschiedlich von der Rauschintensität abhängen:

- Aktivierungszeit $T_{act}(D) \searrow$ t_{cor} besser mit D
- Exkursionszeit $T_{exc}(D) \nearrow$ t_{cor} schlechter mit D