

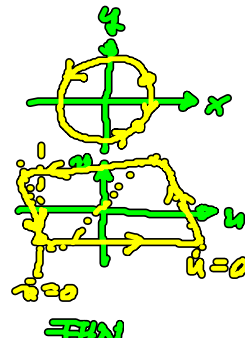
Englisch Summary:
Synchronization in neuronal networks

Networks of excitable systems
 Excitability type I: SNIPER

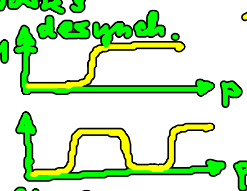
$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\varphi} = b - r \cos \varphi \end{cases}$$

" " II: Fitzhugh-Nagumo

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = x + a \end{cases}$$



Desynchronization in small-world networks with additional (p) inhibitory links



SNIPER with small ϵ : stability island

depending upon exc.-inh. balance: multiple sync-desync transitions

5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen

Bisher: determinist. dynam. Systeme

jetzt: stochast. dynam. Systeme

5.1 Rauschinduzierte Oszillationen und Kohärenzresonanz

Stochast. Prozess

Zeitentwicklung einer Zufallsvar. $X(t)$

(\Leftrightarrow in thermodyn. Gleichgewicht zeitunabh. Wahrscheinl.-verteilung durch Jaynes'sches Prinzip der vorurteilsfreien Schätzung geg.: verallg. kanon. Verteilung $p_i = Z^{-1} e^{-\lambda_i M_i^v}$, M_i^v Zufallsvar.)

Verbundwahrscheinl. zeitabhängig: $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$

Realisierungen $x_1, x_2, x_3 \dots$ von $X(t)$

Markoff-Prozess

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2, x_3, t_3, \dots) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(x_2, t_2; \dots)} \quad \text{bedingte Wahrscheinl.}$$

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots$$

! $= p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$ hängt nur von der jüngsten Zeit ab
kein Gedächtnis!

Langevin-Gleichung

fluktuierende stoch. Kraft $\xi(t)$ (Rauschen, noise)

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$$

Reibung Rauschen

Gauß'sches weißes Rauschen

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad \langle \dots \rangle = \text{statist. Mittelung}$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t') \quad \text{unkorrel.}$$

zentraler Grenzwertsatz: unkorrel. Zufallsvar. gehorchen einer Gaußverteilung

Autokorrel.fkt.

$$\Phi(s) := \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$$

ergod. System: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\Phi(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)x(t+s) \quad (\text{hier } \langle x \rangle = 0)$$

Fourier-Transform: $\hat{x}(\omega, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t) \quad \text{in } t \in [-T, T]$

spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

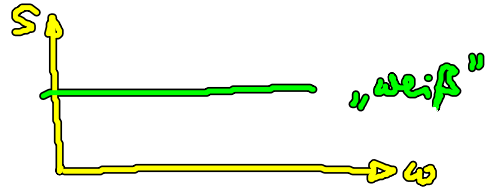
$$S(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} |\hat{x}(\omega, T)|^2$$

$$\rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds$$

Wiener - Khinchin - Theorem

Gauß'sches weißes Rauschen $\xi(t)$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \delta(s) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$



Rauschinduzierte Oszillationen

1. Beispiel: System knapp unterhalb einer Hopf-Bif.
Van der Pol-Osz. (1926, d. Stronker's)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \end{cases}$$

nichtlin. Osz.

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi(t)$$

D Rauschintensität
 $\xi(t)$ gauß'sches weißes Rauschen

$D=0$: Fixpt. $x=y=0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\tau-A = \varepsilon$, $\det A = \omega_0^2$
 $\varepsilon=0$ Hopf-Bif., $\varepsilon < 0$ stabiler Fokus
 $\varepsilon > 0$ instab. Fokus + LC

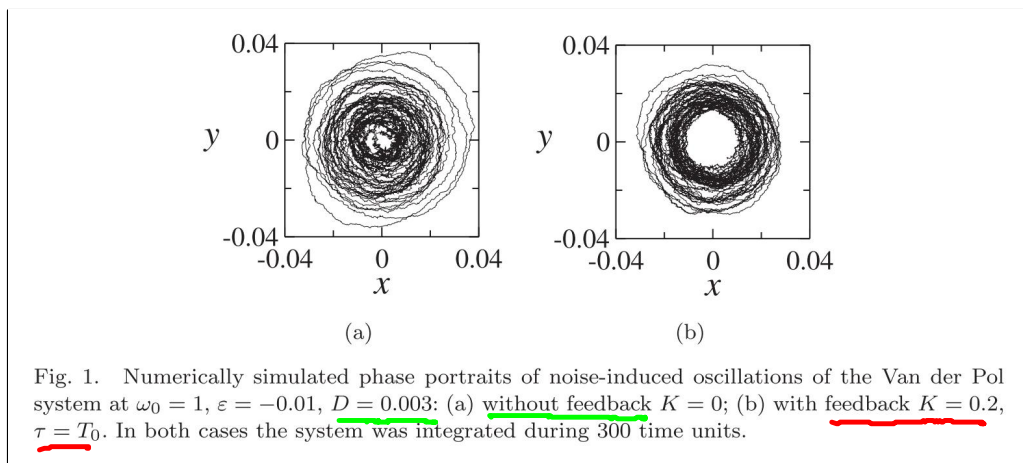
hier: $\varepsilon = -0.01$, $\omega_0 = 1$, $\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \pm i\omega_0$

\Rightarrow keine determin. Osz.

aber rauschinduzierte Osz. ($D \neq 0$)

lit. Janson, Balanov, Schöll: PRL 93, 010601 (2004)
 Balanov, Janson, Schöll: Physica D 199, 1 (2004)
 Schöll, Balanov, Janson, Neiman: Stoch. Dyn. 5, 281 (2005)

SFB-Symp. Fv. 3.7. 15⁰⁰-17⁰⁰ H 3005: A. Neiman
 "Noise"



rauschinduz.
 Osz.
 (VdP)

2. Beispiel : anregbares System (Typ II)

FitzHugh - Nagumo - Modell (Neuron)

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + Df(t) \end{aligned}$$

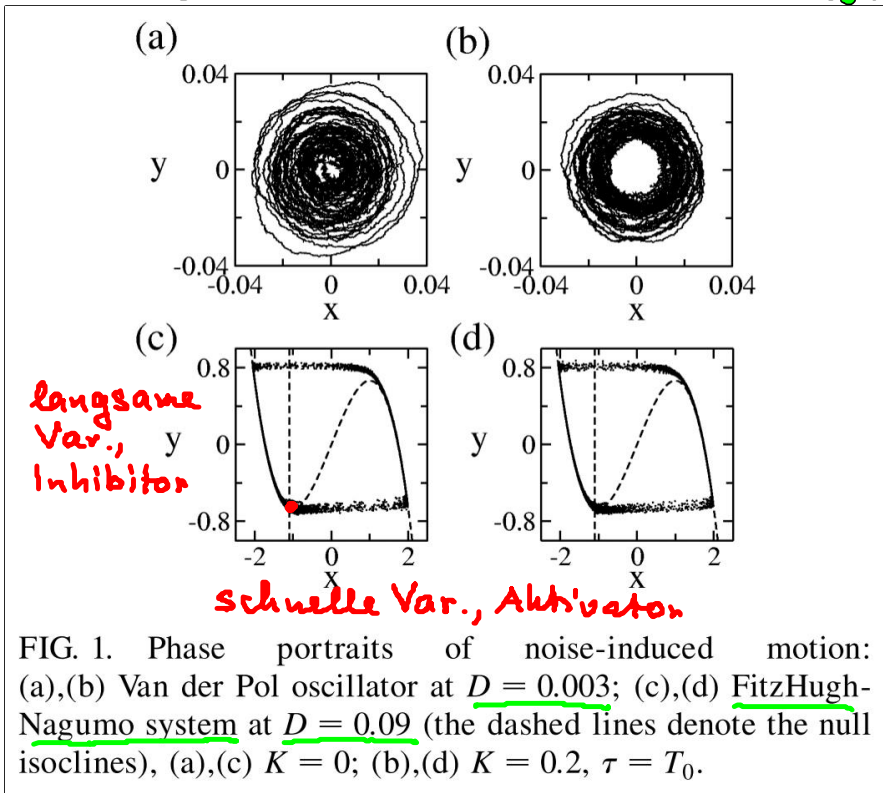
Zeitskalentrenn. $\epsilon \ll 1$ ($\epsilon = 0.01$)

Anreg. Schwelle a ($a = 1.1$)

$D=0$: Fixpt. $x = -a, y = -a - \frac{a^3}{3}$ stabiler Knoten für $a > 1$ (anregbar)

(hier nicht betrachtet; $a < 1$ instab. Fixpt. + LC)

ohne Kontrolle mit Kontrolle



VolP

FHN

$D \neq 0$: rauschinduz. Osz.

(spiking von Neuronen)

Kohärenzresonanz (Pikovsky, Kuzhnetsov: PRL 78, 775 (1997))

Hu, Ditinger, Ning, Haken: PRL 71, 807 (1993)

(stoch. Resonanz ohne ext. treibende period. Kraft)

konstruktiver Einfluss von Rauschen:

- Regularität („Kohärenz“) der rauschinduz. Osz. am größten für endl. Rauschintensität $D_{opt} > 0$.

- Maß für Regularität:

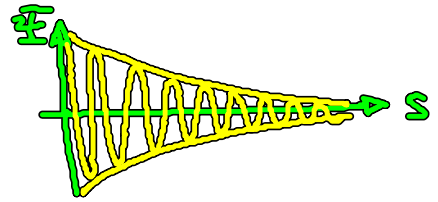
$$\text{Korrelationszeit } t_{\text{cor}} = \frac{1}{\text{Varianz}} \int_0^{\infty} |\Phi(s)| ds$$

Autokorrel.fkt. $\Phi(s)$

(für lin. stoch. Prozesse $\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + \xi(t)$)

$$\Phi(s) = \Phi(0) e^{-\lambda s} \cos \omega_0 s$$

$$t_{\text{cor}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s| ds$$

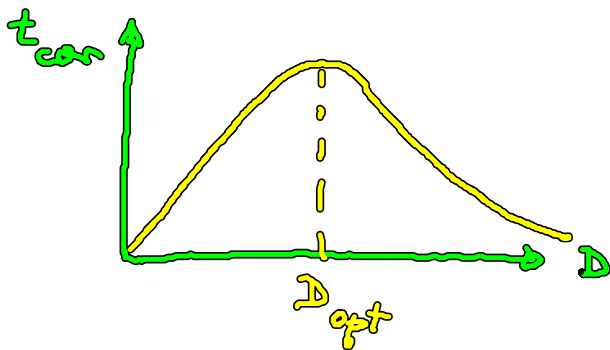


Approx.: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}$ Füllfaktor für $\lambda \ll \omega_0$

$$t_{\text{cor}} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} ds = \frac{2}{\pi \lambda}$$

$$\Rightarrow \Phi(s) = \Phi(0) e^{-\frac{2}{\pi} \frac{s}{t_{\text{cor}}}} \cos(\omega_0 s)$$

(exp. abklingende Korrelation)



Kohärenzresonanz

z.B. FHN (nichtlinear)
anregbar $|a| > 1$

2 Zeitskalen, die unterschiedlich von der Rauschintensität abhängen:

- Aktivierungszeit $T_{\text{act}}(D) \searrow$ t_{cor} besser mit D
- Exkursionszeit $T_{\text{exc}}(D) \nearrow$ t_{cor} schlechter mit D