Wh:

- eindimensionales Zufalls"problem", Kontinuität

$\rightarrow$ Wahrsch.-dichte $\rho(x)$

$$\langle x \rangle = \int dx\, \rho(x)\, x$$

$$M_\nu := \int dx\, \rho(x)\, x^\nu$$

Erzeugende $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle$ — $\left.\frac{\partial^\nu Z(\alpha)}{\partial \alpha^\nu}\right|_{\alpha=0} = M_\nu$

der Kumulanten $\Gamma(\alpha) = \ln Z(\alpha)$

- mehrdimensional: $Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha} \cdot \underline{x}} \rangle$

Speziell für zwei unkorrelierte Zufallsvariablen x_1, x_2 gilt

$$Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \rangle$$

Faktorisierung!

$$= \int dx_1 \int dx_2\, \rho_1(x_1)\, \rho_2(x_2)\, e^{\alpha_1 x_1}\, e^{\alpha_2 x_2}$$

$$= \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

$$\ln Z(\underline{\alpha}) = \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle + \ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

Korrelationsmatrix

x_k, x_l : Elemente von $\underline{x}$

$$(\underline{\underline{C}})_{kl} = \langle (x_k - \langle x_k \rangle)(x_l - \langle x_l \rangle) \rangle$$

umschreibe

$$(\underline{\underline{C}})_{kl} = \langle \overbrace{\Delta x_k}^{x_k - \langle x_k \rangle} \Delta x_l \rangle$$

$$= \langle x_k x_l \rangle - \langle x_k \langle x_l \rangle \rangle - \langle \langle x_k \rangle x_l \rangle + \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

$$= \langle x_k x_l \rangle - \cancel{\langle x_k \rangle \langle x_l \rangle} - \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle + \cancel{\langle x_k \rangle \langle x_l \rangle}$$

$$= \langle x_k x_l \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

z.B. mehrdimensionale Gaußverteilung

$$\rho(\underline{x}) = (2\pi)^{-d/2} (\mathrm{Det}\, \underline{\underline{A}})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \langle \underline{x} \rangle)^T \underline{\underline{A}}^{-1} (\underline{x} - \langle \underline{x} \rangle)}$$

Hier folgt:

$$\left(\underline{\underline{G}}\right)_{kl} = \left(\underline{\underline{A}}\right)_{kl}$$

„Die Zufallsvariablen sind unkorreliert"

allgemein: $\left(\underline{\underline{G}}\right)_{kl} = 0$ für $k \neq l$

Zentraler Grenzwertsatz

Gegeben sei eine Summe unabhängiger Zufallsgrößen

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_d$$

unkorreliert (d.h. z.B. $\langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$ etc.)

Für sehr große d folgt unabhängig von der speziellen Form der Einzelwahrsch.

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta x}\, e^{-\frac{1}{2\langle(\Delta x)^2\rangle}\left(x - \langle x \rangle\right)^2}$$

Gaußverteilung!

1.2. Markov-Prozess

Generell: Ein stochastischer Prozess beschreibt die Zeitentwicklung einer Zufallsvariable X

Betrachte im Folgenden $d=1$ und diskretisierte Zeiten

Es sei: x_1 : Wert von X zur Zeit t_1

x_2 : " " " " " t_2

$\vdots$

x_n : " " " " " t_n

und $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$

Zeitabhängige Verbundwahrscheinlichkeit

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \ldots, x_n, t_n)$$

Wahrsch., dass zur Zeit t_1 der Wert x_1, zur Zeit t_2 der Wert x_2, ... , . . . vorliegt

Betrachte nun bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(\underbrace{x_{n+1}, t_{n+1}; \dots; x_{n+m}, t_{n+m}}_{\text{"Zukunft"}} \,|\, \underbrace{x_1, t_1; \dots}_{\text{"Vergangenheit"}}; \underbrace{x_n, t_n}_{\text{"Gegenwart"}})$$

Wahrsch. für das Auftreten von

x_{n+1} bei t_{n+1}, ..., x_{n+m} bei t_{n+m}

unter der Bedingung, dass

bei t_1 x_1, ..., bei t_n x_n vorlag

Erinnerung:

$P(A|B)$: Wahrsch. für das Auftreten von A unter der Bedingung, dass B vorliegt

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ ← Verbundwahrs.

Dann folgt:

$$p(x_{n+1}, t_{n+1}; \dots; x_{n+m}, t_{n+m} \,|\, x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

$$= \frac{p(x_1,t_1; \dots \dots ; x_{n+m}, t_{n+m})}{p(x_1,t_1; \dots ; x_n,t_n)}$$

speziell: $m=1$

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} | x_1, t_1; \dots ; x_n, t_n)$$

Wahrsch. für das Auftreten von x_{n+1} in der Zukunftszeit t_{n+1}, falls bei t_1 x_1 ..... vorlag

Diese bedingte Wahrsch. nennt man häufig auch

Übergangswahrscheinlichkeit

Klassifizierung stochastischer Prozesse

a) Reiner Zufallsprozeß

Faktorisierung!

$$p(x_1,t_1; \dots ; x_n,t_n) = p(x_1,t_1) \dots p(x_n,t_n)$$

Folgerung: $p(x_{n+1},t_{n+1} | x_1,t_1, \dots ; x_n,t_n) = p(x_{n+1},t_{n+1})$

Es gibt also keine Korrelation zwischen Ereignissen zu verschiedenen Zeitpunkten

b) Markov-Prozess

Übergangswahrsch.

$$p(x_{n+1}, t_{n+1} \,|\, x_1, t_1; \ldots; x_n, t_n) \overset{!}{=} p(\underbrace{x_{n+1}, t_{n+1}}_{\text{"Zukunft"}} \,|\, \underbrace{x_n, t_n}_{\text{"Gegenwart"}})$$

Beim Markov-Prozeß wird die Zukunft (t_{n+1}) nicht durch die gesamte Vergangenheit, sondern nur durch die Gegenwart (t_n) bestimmt!

man sagt:

Der Markov-Prozeß ist ein stochastischer Prozeß ohne Gedächtnis!

(unabhängig von der Vorgeschichte)

Häufig ist das eine gute Approximation, trotzdem sind Gedächtniseffekte wichtig!

Folgerung für die Verbundwahrsch.

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}}$$

$$p(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)$$

$$\stackrel{\text{allg.}}{=} p(x_n,t_n|x_1,t_1;\dots,x_{n-1},t_{n-1})\cdot p(x_1,t_1;\dots;x_{n-1},t_{n-1})$$

$$\stackrel{\text{Markov}}{=} p(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\,p(x_1,t_1;\dots,x_{n-1},t_{n-1})$$

$$= p(x_n,t_n|x_{n-1},t_{n-1})\,p(x_{n-1},t_{n-1}|x_{n-2},t_{n-2})\,p(x_1,t_1,\dots x_{n-2},t_{n-2})$$

Prozedur wiederholen

$$\Rightarrow p(x_1,t_1;\dots,x_n,t_n)$$

Markov!

$$= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$\cdot\, p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2})$$

$$\cdot \ldots \cdot p(x_1, t_1)$$

„Markov-Kette"

<u>Betrachte nun konkret 3 Zeiten</u>

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3)$$

$$= p(x_3, t_3 | x_2, t_2)\, p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \cdot p(x_1, t_1)$$

Markov-Prozess

Integriere (bzw. summiere für diskrete Variablen) über alle Zustände x_2

Verabrede: $\int dx_2\, p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) = p(x_1, t_1; x_3, t_3)$

$$\Rightarrow p(x_1,t_1;x_3,t_3)$$

$$= \int dx_2 \; p(x_3,t_3|x_2,t_2)\, p(x_2,t_2|x_1,t_1) \cdot p(x_1,t_1)$$

$$\left(\sum_{x_2} \ldots\right)$$

Auf der rechten Seite können wir $p(x_1,t_1)$ aus dem Integral herausziehen!

Dividiere durch $p(x_1,t_1)$

$$\boxed{\Rightarrow p(x_3,t_3|x_1,t_1) = \int dx_2 \; p(x_3,t_3/x_2,t_2) \cdot p(x_2,t_2/x_1,t_1)}$$

„Chapman – Kolmogorov – Gleichung!

Interpretation:

Die Übergangswahrsch. vom Ausgangszustand x_1 bei t_1 zum Endzustand x_3 bei t_3 entspricht dem Produkt der Übergangswahrsch. vom Ausgangszustand

zu einem Zwischenzustand x_2 bei t_2 und der Übergangswahrsch. vom Zwischen- zum Endzustand

— integriert bzw. summiert über alle möglichen Zwischenzustände!

Chapman-Kolmogorov-Gl.:
Ausgangspunkt für die Herleitung der Mastergleichung!

1.3. Stationäre stochastische Prozesse, Autokorrelationsfunktionen

Stationärer Prozess

$\Leftrightarrow$ Die Eigenschaften ändern sich nicht bei Verschiebung der Zeitachse (Zeittranslationsinvarianz)

$$p(x_1,t_1;\dots;x_n,t_n)$$
$$= p(x_1,t_1+\varepsilon;\dots\dots;x_n,t_n+\varepsilon)$$

Folgerungen

- Die <u>einzeitige</u> Wahrsch. $p(x_1,t)$ ist zeitunabhängig, und ebenso alle Momente

$$p(x_1,t) = p(x_1)$$
$$M_\nu(t) = M_\nu$$

- Die zweizeitige Verbundwahrsch. hängt nur von der <u>Differenz</u> der Zeiten ab

$$p(x_1,t_1;x_2,t_2)$$

$$= p(x_1,0;x_2,\underbrace{t_2-t_1}_{\tau})$$

stat. Prozess

Zeitnullpunkt beliebig

Folgerung für Übergangswahrscheinlichkeit

$$p(x_2,t_2|x_1,t_1) = \frac{p(x_1,t_1;x_2,t_2)}{p(x_1,t_1)}$$

$$= \frac{p(x_1,0;x_2,t_2-t_1)}{p(x_1)}$$

Stationarität

$$= p(x_2,t_2-t_1|x_1,0)$$

Beim Markov-Prozess können alle Verbundwahrsch.
als Produkte von Übergangswahrsch. und
einzeilige Wahrsch. geschrieben werden (Markovkette)
⇒ Es treten also überall nur Zeitdifferenz auf!