Wh:

Modell A: $$\frac{\partial \phi(\underline{r},t)}{\partial t} = \underbrace{-M \frac{\delta F}{\delta \phi}}_{\text{Relaxationsbeitrag}} + \eta(\underline{r},t) \quad \text{FDT}$$

$\overset{\phi}{\Longrightarrow}$ sucht Minimum von $F[\phi]$ zu

typischerweise: $F[\phi]$ Ginzburg-Landau

GGW: Keine treibende Kraft

$\Longrightarrow$ System strebt Gleichgewichtszustand zu

Modell B: $$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla j(\underline{r},t) + \xi(\underline{r},t) \quad \text{Cahn-Hilliard}$$

$$j \sim \frac{\delta F}{\delta \phi}$$

<u>Konkrete Anwendung von Modell A</u>.

Dynamik der Magnetisierung eines Ferromagneten

$$\phi(\underline{r},t) \to M(\underline{r},t)$$

$$F[M] = \int d\underline{r} \left(\frac{a}{2}(T-T_c) M(\underline{r})^2 + \frac{b}{4} M^4 + \frac{c}{2}(\nabla M)^2 - Mh \right)$$

Krit. Temperatur

äußeres Magnetfeld

Gleichgewicht

Das statistische Gewicht einer bel. Konfiguration $M(\underline{r})$ ist gegeben durch $e^{-\beta F[M]}$

$\left(\Leftrightarrow P^{eq}(M) \sim e^{-\beta F[M]} \right)$

$\Rightarrow$ Gleichgewichts- (wahrscheinlichste) Konfiguration aus

$$\frac{\delta F}{\delta M} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad a(T-T_c) M(\underline{r}) + b(M(\underline{r}))^3 - c \Delta M(\underline{r}) - h(\underline{r}) = 0$$

homogener Fall: $a(T-T_c)M + bM^3 - h = 0$ (*)

$(\Delta M = 0)$

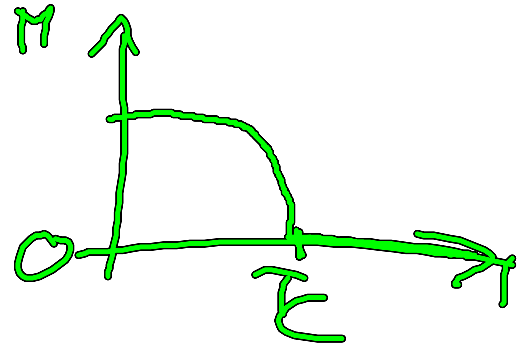
Betrachte Grenzfall $h \to 0$

Magnetisierung: Dividiere $\circledast$ durch M
(beachte: $M \neq 0$ für $T < T_c$)

$$\underbrace{a(T-T_c)}_{\text{negativ für } T<T_c} + bM^2 = 0$$

$$\Rightarrow M \sim (T_c - T_c)^{\frac{1}{2}}$$

Meanfield-Verhalten



Suszeptibilität:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h}\bigg|_{h\to 0}$$

aus $\circledast$: $a(T-T_c)\frac{\partial M}{\partial h} + 3bM^2 \frac{\partial M}{\partial h} - 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial h}\left(a(T-T_c) + 3bM^2 \right) = 1$$

sei $T > T_c$: $M = 0$ für $h = 0$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\partial M}{\partial h}\bigg|_{h=0} = \frac{1}{a(T-T_c)} \sim (T-T_c)^{-1}$$

Meanfield:

Spin-Spin-Korrelationsfunktion (hier ohne Herleitung)

$$G_{MM}(|\underline{r}-\underline{r}'|) = \langle M(\underline{r})\, M(\underline{r}') \rangle \sim \frac{e^{-|\underline{r}-\underline{r}'|/\xi}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

ξ Korrelationslänge

Es gilt:

$$\xi \sim (T-T_c)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \xi \to \infty \quad \text{für } T \to T_c$$

damit: $$\frac{e^{-|\underline{r}-\underline{r}'|/\xi}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \xrightarrow[T\to T_c]{} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

näml. Korrelationen werden langreichweitig

„kritische Opaleszenz"

<u>Frage</u>:

Zeitl. Verhalten (Relaxationsverhalten) des Ordnungsparameters dicht am krit. Punkt?

Ansatz für die Magnetisierung (nicht erhaltener Ordnungsparameter!)
$\Rightarrow$ Modell A

$$\frac{\partial M(\underline{r},t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\delta F[M]}{\delta M(\underline{r},t)} + \eta(\underline{r},t) \quad (*)$$

η: stochastische Kraft durch „herausintegrierte" schnelle Freiheitsgrade
z.B. Gitterschwingungen (Phononen)

es gilt:

$$\langle \eta(\underline{r},t) \rangle = 0$$

$$\langle \eta(\underline{r},t)\,\eta(\underline{r}',t') \rangle = \underbrace{2\lambda k_B T}_{\text{FDT!}}\, \delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')$$

Setze in (*) die Variationsableitung von F ein

Vereinfachung: $h=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} M(\underline{r},t) = -\lambda \Big(a(T-T_c)\, M(\underline{r},t) + b\,(M(\underline{r},t))^3 - c\, \Delta M(\underline{r},t) \Big) + \eta(\underline{r},t)$$

betrachte nur lineare Terme

$$\Rightarrow b(M(\underline{r},t))^3 \text{ wird vernachlässigt}$$

Auswertung im Fourierraum

$$\hat{M}(\underline{k},t) = \int d\underline{r}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}\, M(\underline{r},t)$$

$$\hat{\eta}(\underline{k},t) = \int d\underline{r}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}}\, \eta(\underline{r},t)$$

$$\Delta M(\underline{r},t) \longrightarrow -k^2\, \hat{M}(\underline{k},t)$$

$$\langle \hat{\eta}(\underline{k},t) \rangle = 0 \qquad \underline{R} = \underline{r} - \underline{r}'$$

$$\hat{E}(k) = \int d\underline{R}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{R}}\, \underbrace{\langle \eta(\underline{r},t)\, \eta(\underline{r}',t') \rangle}_{\sim d(\underline{R})} = 2\lambda k_B T\, \delta(t-t')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{M}(\underline{k},t) = -\lambda\left(a(T-T_c) + ck^2\right)\hat{M}(\underline{k},t) + \hat{\eta}(\underline{k},t)$$

führe $\gamma_k = \lambda\left(a(T-T_c) + ck^2\right)$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\hat{M}(\underline{k},t) = -\gamma_k \hat{M}(\underline{k},t) + \tilde{\eta}(\underline{k},t)}$$

Bemerkung:

Diese Gleichung hat genau dieselbe Struktur wie die bekannte, nicht-überdämpfte Langevin-Gl.:

(in 1D) $\dot{v} = -\gamma v + f(t)$

Wir können sofort schließen

$$\Rightarrow \hat{M}(\underline{k},t) = \hat{M}(\underline{k},0)e^{-\gamma_k t} + e^{-\gamma_k t}\int_0^t dt' e^{\gamma_k t'}\tilde{\eta}(\underline{k},t')$$

Mittelwert über das Rauschen:

$$\langle \hat{M}(\underline{k},t)\rangle = \langle \hat{M}(\underline{k},0)\rangle e^{-\gamma_k t} \xrightarrow{\text{für } \gamma_k > 0, \text{ d.h. } T > T_c} 0 \text{ für } t \to \infty$$

Korrelationsfunktion

$$\langle \hat{M}(\underline{k},t)\,\hat{M}(\underline{k},t')\rangle$$

$$= \frac{2\lambda k_B T}{2\gamma_k} e^{-\gamma_k(|t-t'|)} + e^{-\gamma_k(t+t')} \left(\langle M(\underline{k},0)^2 \rangle - \frac{2\lambda k_B T}{2\gamma_k} \right)$$

2. Term auf der rechten Seite ist nicht relevant

– wird vernachlässigbar für große Zeiten $t, t', t+t' \gg \frac{1}{\gamma_k}$

– außerdem:

$\langle \underline{M}(\underline{k},0)^2 \rangle$

liefert nach Gleichverteilungssatz (Gleichgewicht!)

eine Konstante, die dem letzten Term entspricht

$(\ldots.)$ verschwindet!

$\boxed{\text{Physik. Verhalten!}}$

$$\Rightarrow \langle \hat{M}(k,t)\,\hat{M}(k,t') \rangle = \frac{k_B T \lambda}{\gamma_k}\, e^{-\gamma_k |t-t'|}$$

Einsetzen von $\gamma_k = \lambda\left(a(T-T_c) + c k^2\right)$

$$\Rightarrow \langle \hat{M}(k,t)\,\hat{M}(k,t') \rangle = \frac{k_B T}{a(T-T_c) + c k^2}\, e^{-\gamma_k |t-t'|}$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\gamma_k}$ hat die Funktion einer Relaxationszeit

- Bei festem $k = |k|$ nimmt die Relaxationszeit bei Annäherung an den krit. Punkt ($T \to T_c$) drastisch zu!

Insbesondere

$$\gamma_{k\to 0} = \lambda\, a(T-T_c) \to 0$$

$$\frac{1}{\gamma_{k\to 0}} \to \infty$$

„Critical slowing down"

typisches Phänomen in der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung!