3. Elemente der Wahrscheinlichkeitstheorie

- Grund: Statistische Mechanik basiert auf Wahrscheinlichkeitsaussagen
- i.f.: „lässigen Umgang" mit mathem. Symbolik

3.1. Definitionen

- Def.: $\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{stochastische}\\ \text{Zufalls-}\end{array}\right\}$ Variable x gegeben durch
  (i) Wertebereich S
  (ii) Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x)$
  („Wahrscheinlichkeit mit der Wert x vorkommt)} (3.1)

- Def.: $\boxed{\text{Ereignis } E \subset S}$
  Teilmenge

- Bedingungen für $P(x)$ bzw $P(E)$:

  (i) Positivität: $P(E) \geq 0$
  (ii) Additivität: $P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$
  falls A, B unabhängige Ereignisse (3.3)
  (iii) Normierung: $P(S) = 1$
  „irgendein $x \in S$ wird mit Sicherheit angenommen"

- diskrete Verteilungen: $x = x_1, \ldots, x_N \in S$
  $P(x_i)$ ... Wahrscheinlichkeit für x_i
  $\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1$ ... Normierung

  Bsp: Würfel. x ... Wurfzahl
  $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_6 = 6$

$P(x_i)$?

(i) objektives $P(x_i)$: experimentell: N Würfe, N_i mal x_i

$$\longrightarrow \quad P(x_i) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}$$

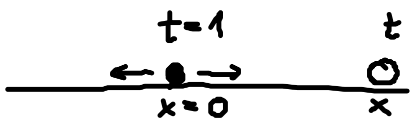
(ii) subjektives $P(x_i)$: $P(x_i) = \frac{1}{6}$, idealer Würfel!

• kontinuierliche Verteilung:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \in S = [x_1, x_2] \\ P(x)\,dx \ldots \text{ Wahrscheinlichkeit für } [x, x+dx] \\ \quad P(x) \ldots \qquad \text{" \quad keitsdichte (funktion)} \\ \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} P(x)\,dx = 1 \ldots \text{ Normierung} \end{array}} \quad (3.4)$$

kumulative Wahrscheinlichkeit: $\displaystyle\int_{x_1}^{x} P(x')\,dx'$ (3.5)

Bsp: 1 dim. Zufallsgeher = Brownsches Teilchen



$P(x,t)$?

• i.f. Darstellung für kont. $P(x)$!
Übertragung auf diskret. $P(x)$: $\int \ldots dx \longrightarrow \sum_i$

• kont. $P(x)$ aus diskreter Verteilung:

Geg.: x_i mit Wahrscheinlichkeit $p_i \longrightarrow P(x) = \sum_i p_i\, \delta(x - x_i)$

denn $p_i = \displaystyle\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} P(x)\,dx$ (3.6)

3.2 Eigenschaften von $P(x)$

a) Mittelwerte

• Mittel-/Erwartungswert einer Observablen $f(x)$:

$$\boxed{\langle f \rangle = \int f(x) \underbrace{P(x)\,dx}_{\text{Wahrscheinl. mit der } f(x) \text{ vorkommt!}}} \quad (3.7)$$

Bsp: Würfel
mittlere Wurfzahl: $\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{6} x_i \, P(x_i)$

$$= \frac{1}{6}(1+2 \ldots +6) = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\boxed{P(f) = \langle \delta(f(x) - f) \rangle} \quad (3.8)$$

Beweis: s. Übungen

- $\boxed{\text{n-tes Moment von } P(x): \quad \langle x^n \rangle = \int x^n P(x)\, dx}$ (3.9)

(i) Mittelwert: $\langle x \rangle$

(ii) Varianz von x
= Schwankungsquadrat
= mittlere quadratische Abweichung

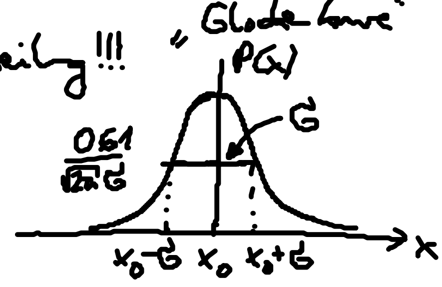
$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - \langle x \rangle^2 \rangle = \mathrm{Var}(x) \quad (3.10)$$

$$\langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle$$

Standardabweichung: Δx ... „Breite von $P(x)$“
Schwankungsbreite (3.11)

- Bsp: Gaußsche/Normalverteilung: wichtigste Verteilung!!!

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2} \quad (3.12)$$



Momente:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{n ungerade:} & \langle (x-x_0)^n \rangle = 0, \quad \text{insbes. } \langle x \rangle = x_0 \\ \text{n gerade:} & \langle (x-x_0)^n \rangle = \underbrace{(n-1)!!}_{(n-1)(n-3)\ldots 1}\, \sigma^n \\ & \text{insbes.: } \langle (x-x_0)^2 \rangle = \sigma^2 \end{array}\right\} (3.12)$$

Beweis: Übungen

- $\boxed{\text{Kenntnis aller } \langle x^n \rangle \Longleftrightarrow P(x)}$

Beweis: 6)

b) Charakteristische Funktion und Kumulanten

- **Def:** $$\boxed{G(k) = \int dx\, e^{-ikx} P(x) = \langle e^{-ikx} \rangle} \quad (3.13)$$

... charakt. Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} &\longrightarrow \langle x^n \rangle = \frac{1}{(-i)^n} \left. \frac{d^n G(k)}{dk^n} \right|_{k=0} \\ &\xrightarrow{\text{Taylor}} G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle \end{aligned}} \quad (3.14)$$

$$\xrightarrow{FT^{-1}} P(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} G(k) \quad ✓$$

insbes: $$e^{ikx_0} G(k) = \langle e^{-ik(x-x_0)} \rangle = \sum_n \frac{(-ik)^n}{n!} \langle (x-x_0)^n \rangle \quad (3.15)$$

- erzeugende Funktion für Kumulanten:

$$\boxed{\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \longleftrightarrow \langle x^n \rangle_c = \frac{\partial^n}{\partial(-ik)^n} \ln G(k) \Big|_{k=0}} \quad (3.16)$$

... Kumulanten

Bestimmung der $\langle x^n \rangle_c$:

Entwickle $$\ln G(k) = \ln\Big(1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle}_{\varepsilon}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\varepsilon^m}{m}$$

Sortiere Glieder nach k^n bzw Potenzen x^n

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \langle x \rangle_c &= \langle x \rangle \\ \langle x^2 \rangle_c &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \overset{(3.10)}{=} \Delta x^2 \\ \langle x^3 \rangle_c &= \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3 = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \\ &\qquad \text{... skewness} \\ \langle x^4 \rangle_c &= \dots \neq \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle \\ &= \langle x^4 \rangle - 4\langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 \\ &\quad - 6\langle x \rangle^4 \quad \dots \end{aligned}} \quad (3.17)$$

... „wesentliche Momente" von $P(x)$

n Punkt-Korrelationen

[$\langle x^n\rangle_c = 0$ … keine wirklichen n Punkt-Korrelationen]

• Umkehrung:

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \langle x\rangle_c \\
\langle x^2\rangle &= \langle x^2\rangle_c + \langle x\rangle_c^2 \\
\langle x^3\rangle &= \langle x^3\rangle_c + 3\,\langle x^2\rangle_c \langle x_c\rangle + \langle x\rangle_c^3
\end{aligned}
\qquad (3.18)
$$

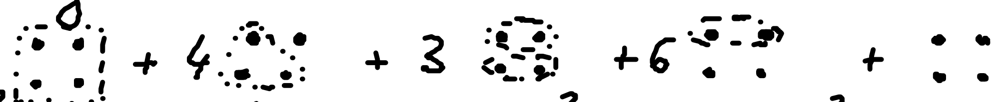
Anzahl der verschiedenen Kombinationen aus 3 Elementen: $\binom{3}{2}=3$

$$\langle x^4\rangle = \langle x^4\rangle_c + 4\langle x^3\rangle_c\langle x\rangle_c + 3\langle x^2\rangle_c^2 + 6\langle x^2\rangle_c\langle x\rangle_c^2 + \langle x\rangle_c^4$$

$\vdots$

• graphische Darstellung:

Bsp: $\langle x^4\rangle =$



$$\langle x^4\rangle_c \qquad \langle x^3\rangle_c\langle x\rangle_c \qquad \langle x^2\rangle_c^2 \qquad \langle x^2\rangle_c\langle x\rangle_c^2 \qquad \langle x\rangle_c^4$$

Cluster $\hat{=}\ \langle\ldots\rangle_c$

allgemein: [ohne Beweis]

$$\boxed{\langle x^m\rangle = \sum_{\{p_n\}}{}' \; m! \prod_n \frac{1}{p_n!\,(n!)^{p_n}} \langle x^n\rangle_c^{p_n}} \qquad (3.18a)$$

p_n … Anzahl der Cluster mit Ordnung n

$\sum'_{\{p_n\}}$ … über alle Cluster-Gruppen $\{p_n\}$ mit $\sum_n n p_n = m$

$\prod_n \frac{m!}{p_n!\,(n!)^{p_n}}$ … möglichen Realisierungen der Clustergruppe $\{p_n\}$

• **Bsp:** Gaußsche Verteilung (3.12) [Beweise: Übungen]

(i) $G(k) = \exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{2} - ikx_0\right]$ (3.19)

(ii) $\ln G(k) = -ikx_0 - \frac{k^2\sigma^2}{2}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}\langle x\rangle_c &= x_0\\ \langle x^2\rangle_c &= \sigma^2\end{aligned}}$ (3.20)

$\langle x^3\rangle_c = \langle x^4\rangle_c = \ldots = 0$

bestimmen Gaußsche Verteilung
[einzige Verteilung mit $\langle x^n\rangle_c = 0, n>3$]

3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen

(i) Binomial-Verteilung

• **Geg:** Einzelexperiment mit 2 Ausgängen (ja, nein für spezielles Ereignis)

also: $x = A, B$ mit $P(A) = p$
$P(B) = q = 1-p$

Ges: Wahrscheinlichkeit für N_A Ausgänge A bei N Einzelexperimente

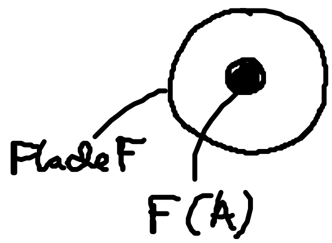
$$\boxed{P_N(N_A) = \underbrace{\binom{N}{N_A}}_{=\frac{N!}{N_A!(N-N_A)!}} p^{N_A} q^{N-N_A}} \quad (3.21)$$

... Binomialkoeffizient

• Bsp: (1) Würfel: A ... werfe 6, $p(A) = p = \frac{1}{6}$
B ... " keine 6, $p(B) = q = \frac{5}{6}$

(2) Münze: A.. Kopf, B... Zahl

(3) Dart „ohne Geschicklichkeit"



A ... treffe ●, $p(A) = \frac{F(A)}{F}$

B ... treffe Rest $p(B) = 1 - p(A)$

• charakteristische Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A} \rangle = (pe^{-ik} + q)^N$$

$$\sum_{N_A} e^{-ikN_A} p_N(N_A)$$

$$\overset{(3.20)}{=} \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} (pe^{-ik})^{N_A} q^{N-N_A}$$

$$\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = Npq$$

Beweis: nächste Stunde