

3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen

(i) Binomial-Verteilung

$$P_N(N_A) = \binom{N}{N_A} p^{N_A} q^{N-N_A} \quad (3.21)$$

... Wahrsch. für N_A Ausgänge A
bei N Einzelexp.
 $x = A, B$ mit $P(A) = p$
 $P(B) = q = 1-p$

Charakt. Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A} \rangle = (pe^{-ik} + q)^N$$

$$\text{damit: } \langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np, \quad \langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = Npq$$

Beweis:

$$1. \ln G_N(k) = N \ln(pe^{-ik} + q)$$

$\ln G_1(k)$: für einen Versuch } Kumulant für N Versuche
= Kumulant für 1 Versuch
x N

2. Kumulanten:

ein Versuch: Momente:

$$\langle N_A^n \rangle_{N_k=0,1} = 1^n p + 0^n q = p$$

$$N \text{ Versuche: } \langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = N(p-p^2) = Npq$$

$$\langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2 = p(1-p)$$

$$\rightarrow \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} !$$

Mittelwert wird immer größer für $N \rightarrow \infty$

• Grenzfall $N \rightarrow \infty$:

$P_N(N_k) \xrightarrow{\varphi}$ Gaußsche Verteilung
zentraler
Grenzwertsatz (s. Kap. 3.5)

(ii) Poisson-Verteilung

• Geg: Voneinander unabhängige, „seltene“ Einzelereignisse im festen Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...), die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen.

Ges: Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelereignisse mit $\langle x \rangle = \lambda$

o.B. \rightarrow $P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ (3.22)

$x = 0, 1, \dots$



• Bsp. (1) radioaktiver Zerfall in Zeit T

Anzahl mittlerer Zerfälle $\lambda = \alpha T$, $\alpha \dots$ Zerfallrate

$$\rightarrow P_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

... Wahrscheinlichkeit für x Zerfälle in T

(2) Dart mit $F(A) \ll F$

Treffer ist seltenes Ereignis

• charakt. Funktion: f - diskretes x

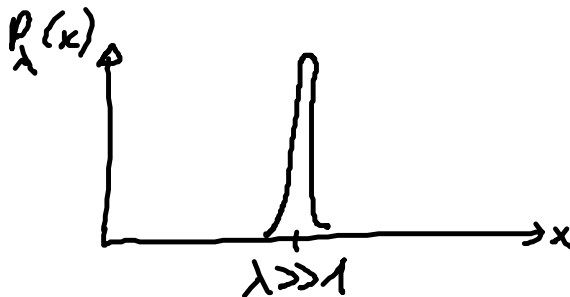
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \exp[\lambda(e^{-ik} - 1)] \quad (3.23)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} (\lambda e^{-ik})^x e^{-\lambda}$$

$$\rightarrow \ln G(k) = \lambda(e^{-ik} - 1) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \quad (3.24)$$

(3.16) \rightarrow Kumulanten: $\langle x^n \rangle_c = \lambda$

insbesondere: $\frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$



• Herleitung von $P_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung (3.21):

$$p \rightarrow 0 \quad (\text{„seltenes Ereignis“})$$

$$N \rightarrow \infty$$

$$\text{so dass } \langle N_A \rangle = Np = \lambda = \text{konst.}$$

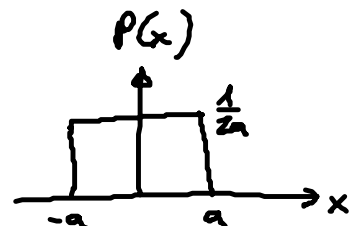
$$P_N(N_A) \rightarrow P_\lambda(N_A) = \frac{\lambda^{N_A} e^{-\lambda}}{N_A!} \quad (3.26)$$

Beweis: Übungen!

b) Kontinuierliche Verteilungen:

(i) homogene Verteilung:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (3.27)$$



- Momente: $\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)} a^{n+1}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Bew. Übung

- Dirakt. Funktion:

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka}, \quad G(0) = 1 \dots \text{Normierung!}$$

Bew. Übung

- Kumulante?

(ii) Normal / Gaußsche Verteilung
s.o.

(iii) Exponentielle Verteilung

$$P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Momente, Dirakt. Funktion, Kumulante (s. Übung)

3.4 Mehrdimensionale Verteilungen

- stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$P(\underline{x}) d^n x \dots$ Wahrscheinlichkeit für $[x_1+dx_1, \dots, x_n+dx_n]$

- unabhängige stochastische Variable: x, y

$$P(x, y) dx dy = P(x) P(y) dx dy \quad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

- Def: Korrelationsfunktionen:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \end{aligned} \quad (3.30)$$

... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Fluktuationen um $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$.

Bsp: $P(x, y) = P(x) P(y)$

$$\rightarrow C_{xy} = \int dx dy P(x) (x - \langle x \rangle) P(y) (y - \langle y \rangle) = 0!$$

• Wahrscheinlichkeitsdichte für $[x_1 + dx_1, \dots, x_{n-1} + dx_{n-1}]$

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int dx_n P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (3.31)$$

• Satz:

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)$

für x_1, \dots, x_k , wenn $x_{k+1} \dots x_n$ mit Sicherheit vorliegen:

$$P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1}, \dots, x_n)} \quad (3.32)$$

wobei $P(x_{k+1}, \dots, x_n) = \int dx_1 \dots dx_k P(x_1, \dots, x_n)$.

„Beweis“: 1. $\int P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) dx_1 \dots dx_k = 1!$ Normierung

$$2. P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) P(x_{k+1} \dots x_n) = P(x_1 \dots x_n)$$

stochastische unabh. Variable: $P(x|y) = \frac{P(x)P(y)}{P(y)} = P(x)!$

3.5 Zentraler Grenzwertsatz

• zentraler Satz für Stat. Mechanik

• Satz:

Seien x_1, x_2, \dots, x_N voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$.

Dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ im Grenzfalle $N \rightarrow \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\Delta y)^2} e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \quad (3.33)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \Delta x^2$

Insbesondere gilt: $\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle \sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

- Bsp. (i) System mit wechselwirkenden Teilchen
 x_i = Energie des i -ten Teilchen
 y = Gesamtenergie

- (ii) Zufallsbewegung („random walk“)
insbes. Brownsche Bewegung



x_i = Zuwachs beim i -ten (mikroskopischen) Schritt
(z.B. durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle)

y = Position nach N Schritten

• Beweis:

Führe ein:
$$\mathbb{E}(\{x_i\}) = \sum_i \frac{x_i - \langle x \rangle}{\sqrt{N}} = \frac{y - N \langle x \rangle}{\sqrt{N}} \quad (3.34)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(z) \stackrel{(3.8)}{=} \langle \delta(z - z(\{x_i\})) \rangle$$

$$= \int dx_1 \dots dx_N \underbrace{w(x_1) \dots w(x_N)}_{\text{"unab. Ereignisse"}} \delta\left(z - \frac{x_1 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N} \langle x \rangle\right)$$

$$\begin{aligned} [\delta(\dots) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik\dots}] &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int dx_1 \dots dx_N \underbrace{w(x_1) \dots w(x_N)}_{\text{Darstellungsfunktion zu } w(x)} e^{-ik \frac{x_1 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} + ik \sqrt{N} \langle x \rangle} \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + ik \sqrt{N} \langle x \rangle} \left[G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \right]^N \end{aligned}$$

mit $G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \stackrel{(3.16)}{=} \exp\left[-i \frac{k}{\sqrt{N}} \langle x \rangle_c - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N} \langle x^2 \rangle_c + i \frac{1}{6} \frac{k^3}{N^{3/2}} \langle x^3 \rangle_c + \dots\right]$
 Kummulate einführen

$$P(z) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz - \frac{1}{2} k^2 \Delta x^2 + i \frac{1}{6} \frac{k^3}{\sqrt{N}} \langle x^3 \rangle_c + \dots}$$

geht: $N \rightarrow \infty$
 $G_p(k) = e^{-\frac{1}{2} k^2 \Delta x^2}$

$$\stackrel{(3.19)}{\rightarrow} P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}$$

mit $P(z) dz = P(y) dy$ und $\frac{dz}{dy} \stackrel{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$\rightarrow P(y) \stackrel{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi N (\Delta x)^2}} e^{-\frac{(y - N \langle x \rangle)^2}{2N (\Delta x)^2}} \quad \text{qed}$$

• Bem.: (3.33) and gültig für abhängige x_i unter gewissen Bedingungen