4.2 BBGKY-Hierarchie

$$\boxed{\frac{\partial f_s}{\partial t} - \{H_s, f_s\} = \sum_{n=1}^{s} \int dV_{s+1} \, \frac{\partial V(q_n - q_{s+1})}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial f_{s+1}}{\partial p_n}} \qquad (4.12)$$

$s = 1, \ldots, N$

4.3 Die Boltzmann-Gleichung

4.3.1 „Herleitung" bzw Motivation

- Bew.gl. für f_1: (4.12) $\longrightarrow$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \{H_1, f_1\} = \int dV_2 \, \frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \qquad (4.13)$$

- Abbruchbedingung + „Vergröberung"

$$f_2(q_1, p_1, q_2, p_2) \longrightarrow f_1(q, p_1, t)\, f_1(q, p_2, t) \qquad (4.14)$$

Bem: (i) Annahme: Potential $V(q_1 - q_2)$ hat endliche Reichweite d

$\longrightarrow$ für $q_1 - q_2 \gg d$ keine 2-Teilchen-Korrelationen

$\hat{=}$ molekulares Chaos

(ii) Führe ein: Stoßpkt. q der Teilchen mit Ausdehnung d

$\longrightarrow$ Vergröberung der Längenskala
" " Zeitskala

} Stoß wird räumlich/zeitlich nicht aufgelöst

$\hat{=}$ Informationsverlust

• Abkürzungen:

(i) $f_1(q,p_1,t) = f(q,p,t) = f$
$f_1(q,p_i,t) = f(q,p_i,t) = f_i,\ i \geq 2$ $\Big\}$ (4.15)

(ii) $\{H_1, f\} = \frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial f}{\partial q}$ $\qquad H_1 = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ $\Big\}$ (4.16)

$= -\underline{F}\cdot\nabla_p f - \frac{p}{m}\cdot\nabla_q f$ mit $\underline{F} = -\nabla_q U$ ... äußere Kraft

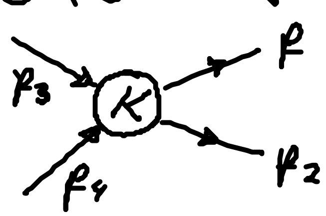
• <u>Boltzmann-Gl.:</u> (4.15), (4.16) in (4.13)

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}p\cdot\nabla_q + \underline{F}\cdot\nabla_p\right) f(q,p,t) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}}\\ &\text{mit } \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = \int d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4\ K(p,p_2;p_3,p_4)\,[f_3 f_4 - f f_2]\\ &\qquad = G - V \quad \text{... Boltzmannscher Stoßzahlansatz}\\ &\left.\begin{matrix}G\\V\end{matrix}\right\} d^3q\, d^3p \text{ ... Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit}\\ &\qquad \left.\begin{matrix}\text{in}\\\text{aus}\end{matrix}\right\} \text{Volumen } d^3q\, d^3p \left.\begin{matrix}\text{hinein-}\\\text{heraus-}\end{matrix}\right\} \text{gestoßen werden}\end{aligned}}\qquad (4.17)$$

Bedeutung: Änderung von f durch Stoßprozesse

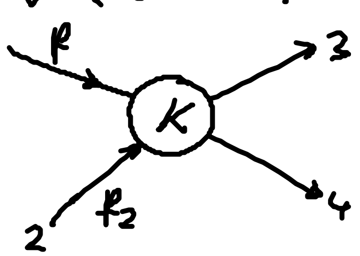
$K(p,p_2;p_3,p_4)$ ... Übergangswahrscheinlichkeit für $p_3, p_4 \longrightarrow p, p_2$

(i) G (Gewinnterm)



„erzeugt" Teilchen mit Impuls p

(ii) V (Verlustterm)



„vernichtet" Teilchen mit Impuls p

(iii) $K(\ldots)\, f_i f_j\, d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4$ … Zahl der Stoßprozesse pro Zeiteinheit im Volumen $d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4$

- Symmetrien von K:

(i) Vertauschbarkeit der Teilchen:

$$K(p, p_2; p_3, p_4) = K(p_2, p; p_4, p_3) \quad (4.18)$$

(ii) Isotropie des Raumes: sei $D \in O(3)$

$$K(Dp, Dp_2; Dp_3, Dp_4) = K(p, p_2; p_3, p_4) \quad (4.19)$$

Insbesondere: $Dp = -p$

(iii) Zeitumkehrinvarianz:

$$K(-p_3, -p_4; -p, -p_2) = K(p, p_2; p_3, p_4) \quad (4.20)$$

(ii)(iii) $\longrightarrow$ $K(p, p_2; p_3, p_4) = K(p_3, p_4; p, p_2)$ (4.21)

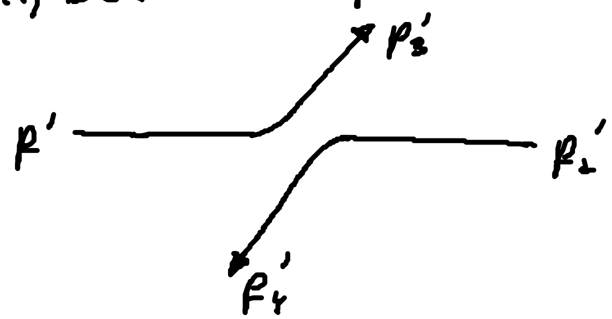
- genaue Herleitung von (4.17) aus BBGKY-Hierarchie: s. M. Kardar, Statistical Physics of Particles

- Explizite Gestalt des Stoßterms:

(i) Impuls- und Energieerhaltung:

$$K(p, p_2; p_3, p_4) \sim \delta(p + p_2 - p_3 - p_4)\, \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right)$$

(ii) Behandle Stoß im Schwerpkt.system (')



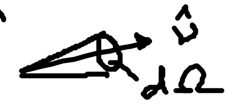
Relativkoordinate: Streuung eines Teilchens am anderen (vgl. Keplerproblem) hier 2 an 1

Intensität des Teilchenstrahls

I = Zahl der einfallenden Teilchen 2 mit Impuls p_2
pro Zeit und Fläche

$$= f(q, p_2)\, d^3p_2\, |\underline{v} - \underline{v}_2|$$

$dN(\hat{v})$ ... Zahl der pro Zeit in das Raumwinkelelement $d\Omega$, um Richtung $\hat{v}$ gestreute Teilchen



$\longrightarrow$ differentielle Streuquerschnitt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I}\frac{dN}{d\Omega}} \quad (4.23)$$

$$\longrightarrow dN = \frac{d\sigma}{d\Omega}\, I\, d\Omega$$

z.B.: $\longrightarrow$ Verlustterm $V = -\int dN \underbrace{f(q,p,t)}_{\text{Dichte der Teilchen 1}}$

$$\overset{(4.23)}{=} -\int d\Omega \left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| I f$$

$$= -\int d\Omega\, d^3p_2 \left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| |\underline{v} - \underline{v}_2|\, f f_2$$

$$G = \dots$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = \int d^3p_2\, d\Omega \left|\frac{d\sigma}{d\Omega}\right| |\underline{v} - \underline{v}_2| \Big[\underbrace{f(q,p_3,t)\, f(q,p_4,t)}_{f_3 f_4} - \underbrace{f(q,p,t)\, f(q,p_2,t)}_{f f_2}\Big]} \quad (4.24)$$

Bem: $f(q, p_3, t)\, f(q, p_4, t)$

über Erhaltungssätze verknüpft mit p, p_2

hier wichtig: nur vor dem Stoß molekulares Chaos

d.h. keine Korrelationen in p_3, p_4

4.3.2 Das H-Theorem

· **Theorem:**

Falls $f(q,p,t)$ die Boltzmann-Gleichung erfüllt, gilt für $H(t) = \int d^3q\, d^3p\, f(q,p,t) \ln f(q,p,t)$, daß $\frac{dH}{dt} \leq 0$

$\longrightarrow$ Boltzmann Gl. beschreibt irreversible Vorgänge, obwohl die zugrunde liegenden mikroskop. Glg. reversible Prozesse erlauben!

· **Beweis:**

$$\frac{dH}{dt} = \int dV \left(\frac{\partial f}{\partial t} \ln f + f \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$= \int dV \frac{\partial f}{\partial t}(1 + \ln f)$$

$$\overset{(4.17)}{=} - \int dV (1+\ln f)\left(\frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + \underline{F} \cdot \nabla_p\right) f + \int dV \left.\frac{df}{dt}\right|_{Stoß} (1+\ln f)$$

$$\underset{\text{wie bei Zeitableitg}}{=} - \int dV \Big(\underbrace{\tfrac{1}{m} p \cdot \underline{\nabla}_q + \underline{F} \cdot \nabla_p}_{\text{Oberflächenterm } = 0}\Big)(f \ln f) + \text{"}$$

Oberflächenterm $= 0$
da $f \ln f \to 0$ für $f \to 0$

$$\longrightarrow \frac{dH}{dt} \underset{\substack{f=f_1\\ q=q_1\\ p=p_1}}{=} - \int d^3q_1\, d^3p_1\, d^3p_2\, d^3p_3\, d^3p_4\, K(p_1,p_2;p_3,p_4)\left[f_1 f_2 - f_3 f_4\right](1+\ln f_1)$$

K invariant unter $\begin{matrix} 1 \leftrightarrow 2 \\ 3 \leftrightarrow 4 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} 1 \leftrightarrow 3 \\ 2 \leftrightarrow 4 \end{matrix}$

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4} \int d^3q_1\, d^3p_1 \ldots d^3p_4\, \underbrace{K(\ldots)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(Wahrscheinlichkeit)}}} \underbrace{\left[f_1 f_2 - f_3 f_4\right] \ln \frac{f_1 f_2}{f_3 f_4}}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(Zeige für } f_1 f_2 \geq f_3 f_4)}}}$$

$\longrightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0$ qed

- Bemerkungen:

(i) $-H \sim$ Informationsentropie

$-H \sim$ Boltzmann-Entropie für $f =$ konstant (s. Kap. 5.1)

} H-Theorem ist Bsp. für Entropiezuwachs

(ii) Grund Irreversibilität

(1) Annahme des molekularen Chaos

(2) „Vergröberung" der Längen- und Zeitskalen

} Verlust an Information des Systems