

## 4.4 Hydrodynam. Bewegungsgleichungen

- Schnelle Relaxation zu lokalem GG: Maxwellverteilung

lokale Dichte  $n(q,t)$

" Temp.  $T(q,t)$

mittlere Geschw:  $u(q,t)$

mittlere Stoßfreie Zeit

- jetzt: Dynamik auf Zeiten  $\tau_H \gg \tau$

→ hydrodynam. Variable!

folgen aus Erhaltungsgröße

### 4.4.1 Erhaltungssätze

- Stoßinvariante → Erhaltungsgröße

beliebiges  $f^0$

$\chi^5 = 1$  → Teilchenzahldichte:  $n(q,t) = \int d^3p \, 1 \, f := \langle 1 \rangle$

$\chi^i = p_i$  → Impulsdichte =  $m \times$  Teilchenstahndichte  $j_i(q,t)$

$j_i(q,t) \equiv n(q,t) u_i(q,t) = \langle \frac{p_i}{m} \rangle$

$\chi^4 = \frac{p^2}{2m}$  → Energiedichte:  $n(q,t) [\frac{m u^2}{2} + e(q,t)] = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle$

$ne = \langle \frac{m}{2} (p_m - u)^2 \rangle = \langle \frac{m}{2} \underline{c}^2 \rangle$

(4.32)

- Bilanzghn. für Erhaltungsgrößen:

$$\rightarrow \left[ \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi^\alpha \rangle + \nabla_q \cdot \frac{1}{m} \langle p \chi^\alpha \rangle = \underline{F} \cdot \langle \nabla_p \chi^\alpha \rangle \right] \quad (4.33)$$

- (i) Teilchenzahldichte:  $\chi^5 = 1$

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q \cdot j = 0$$

(4.34)

$$\text{mit } j = n u = \langle \frac{p}{m} \rangle$$

Differenzialer Erhaltungsgröße

Geschw.

... Kont. gl

- (ii) Impulserhaltung:  $\chi^i = p_i \quad i = 1, 2, 3$   $\left. \begin{array}{l} (4.32) \\ (4.33) \end{array} \right\}$

$$m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{1}{m} \nabla_j \langle p_i p_i \rangle = n F_i \quad \text{mit } \nabla_j = (\nabla_q)_j$$

$\uparrow$  weil  $F_j \langle \nabla_{p_i} p_i \rangle = \delta_{ij} F_j \langle 1 \rangle = n F_i$

$$m^2 \langle (u + c)_i (u + c)_j \rangle = m^2 n u_i u_j + m^2 \langle c_i c_j \rangle$$

$\uparrow$   $\langle c_i \rangle = 0$

→

$$m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \nabla_j \underbrace{(m n u_i u_j - T_{ij})}_{\text{Impulsstaudichte}} = n F_i \quad (4.35)$$

Impulsdichte

$m n u_i u_j$  ... kinetischer Anteil = Impulsdichte x Geschw.

$T_{ij} = -m \langle c_i c_j \rangle$  ... Spannungstensor (= -Drucktensor)

$n F_i$  ... Volumenkraftdichte äußerer Kräfte

Umschreibung: mit (4.34)


$$m \frac{\partial}{\partial t} n u_i + \nabla_j (m n u_i u_j)$$

$$= m n \frac{\partial}{\partial t} u_i + \frac{m u_i \frac{\partial}{\partial t} n + m u_i \nabla_j (n u_j) + m n u_j \nabla_j u_i}{m u_i \left( \frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_j (n u_j) \right)} \stackrel{(4.34)}{=} 0$$

$$m n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla_q \right) u_i = \nabla_j T_{ij} + n F_i \quad (4.36)$$

$\underbrace{m n}_{\text{Massendichte}}$ 
 $\underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla_q \right)}_{\text{konvektive totale / materielle Zeitableitung}}$ 
 $\underbrace{u_i}_{\text{Geschwindigkeit}}$ 
 $= \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Oberflächenkräfte: } \int d^3 q \nabla_j T_{ij} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int T_{ij} d^2 f_j!}$ 
 $+ n F_i$

$\frac{d}{dt} u_i(q, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_i + \underbrace{q_j}_{u_j} \nabla_j u_i$



The diagram shows a small volume element (a circle) with internal forces  $f_i$ . Two arrows labeled  $d^2 f$  point outwards from the boundary, representing surface forces.

z.B.: Druck- / Reibungskräfte  
lokale Kräfte  $\infty$   
innere

(4.36) = Newtonsche Grundgleichung:

linke Seite: Beschleunigung eines Volumens mit Geschw  $\underline{u}$

rechte Seite: Oberflächen + äußere Kräfte auf Vol. element

(iii) Energieerhaltung:  $\chi^S = \frac{p^2}{2m}$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{1}{m} \langle p_i \chi^S \rangle &= \langle (u_i + c_i) \frac{p^2}{2m} \rangle \\
 &= u_i \langle \frac{p^2}{2m} \rangle + \frac{m}{2} \langle c_i (u_j + c_j)^2 \rangle \\
 &\stackrel{(4.32)}{=} n u_i \left( \frac{m}{2} u^2 + e \right) + \underbrace{m u_j \langle c_i c_j \rangle}_{-u_j T_{ij}} + \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \langle \nabla_p \frac{p^2}{2m} \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{j} \quad (4.37)$$

mit  
(1)(2)  
in (4.33)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ n \left( \frac{m}{2} u^2 + e \right) \right] + \nabla_i \left[ n u_i \left( \frac{m}{2} u^2 + e \right) - T_{ij} u_j + q_i \right] = \mathbf{j} \cdot \mathbf{F}$$

Energiedichte
Leistung
erzeugung  
konvektiver
innere
Wärme
erzeugung  
Anteil
Kräfte
strom
Kräfte

mit  $q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle$  ... Wärmestromdichte  
(4.38)

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36):

$$\rightarrow n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) e = -\nabla \cdot \mathbf{q} + T_{ij} \nabla_i u_j \quad (4.38)$$

zeitliche Änderung
Wärme-
median Leistung  
der inneren Energie
fluß
der inneren Kräfte  
für bewegtes Vol.

  
element

$$[TD: \quad du = \delta Q + \delta W]$$

### 4.4.2 Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

- Materialgerade für Spannungstensor  $\underline{T}$  und Wärmestromdichte  $\mathbf{q}$   
 $\equiv$  explizite Bredy mit  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$

Annahme: lokales GG

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2}{2m k_B T}\right] \quad (4.29)$$

mit  $n, T, \mathbf{u} = n, T, \mathbf{u}(\mathbf{q}, t)$   $\underbrace{\mathbf{p} - m\mathbf{u}}_{\mathbf{c}} \rightarrow \left[-\frac{\mathbf{c}^2}{2k_B T/m}\right]$

Bemerkung:  $\left.\frac{\partial f_0}{\partial t}\right|_{\text{Stgs}} = 0$ , aber  $(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}) f_0 \neq 0!!$

• Berechnung von Mittelwert: (4.35)

$$\langle c_i c_j \rangle_0 \stackrel{(4.29)}{=} n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}$$

$c_i = \frac{p_i}{m} - u_i$

$$T_{ij}^0 = -m \langle c_i c_j \rangle_0 = -P \delta_{ij}$$

mit  $P = n k_B T$   
... ideale Gasgleichung

$$q_i^0 = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle_0 = 0$$

keine Dissipation!

$$ne = \frac{m}{2} \langle c^2 \rangle_0 = \frac{3}{2} n k_B T$$

... kinetische Zustandsgleichung

(4.40)

⇒ explizite Erhaltungssätze:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \quad (4.41)$$

(4.34)  $\longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla_{\mathbf{q}} \cdot (n\mathbf{u}) \quad (4.42)$$

(4.36)  $\nabla \cdot \mathbf{T}_{ij} = -\nabla_i P$

$$m n \frac{d}{dt} \mathbf{u} = -\nabla_{\mathbf{q}} P + n \mathbf{F}, \quad P = n k_B T \quad (4.43)$$

(4.38)  $\frac{T_{ij} \nabla_i u_j}{- \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{T}_{ij} \nabla_i u_j} = -P \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{u}$

$$\frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.44)$$

• Bemerkung:

(1) Gl. (4.42) - (4.44) invariant unter Zeitumkehr ( $t \rightarrow -t, \mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$ )

- enthalten keine Dissipation!
- Störungen des GG-Zustandes relaxieren nicht gegen Null

(2) Verdichtung:

$$(4.42) \rightarrow \frac{d}{dt} n = -n \nabla_{\vec{q}} u \rightarrow \nabla_{\vec{q}} u = -\frac{1}{n} \frac{d}{dt} n = -\frac{d}{dt} \ln n$$

$$\xrightarrow{\text{in (4.44)}} \frac{d}{dt} T = \frac{2}{3} T \frac{d}{dt} \ln n \rightarrow \frac{2}{3} \frac{1}{T} \frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} \ln n$$
$$\frac{d}{dt} \ln T$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \ln (n T^{-3/2}) = 0!$$

$n$  lokale Entropie des Gases (o.B.)  
ändert sich nicht!

(3) (4.43)  $\equiv$  Euler'sche Gln.

Behandlung von Störungen kompressibler Gase

• Modenanalyse von (4.42) - (4.44): s. Übung

(i) Setze:  $n = \bar{n} + \delta n(q, t)$

$$T = \bar{T} + \delta T(q, t)$$

$$u = 0 + u(q, t)$$

$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{homogener GG-Zustand}} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{kleine Abweichung}}$

(ii) linearisiere (4.42) - (4.44) in  $\delta n, \delta T, u$

(iii) Löse durch Modenansatz:

$$\begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta n(k, \omega) \\ \delta T(k, \omega) \\ u(k, \omega) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + k \cdot q}$$

$\text{Det}[\text{Koeffizientenmatrix}] = 0 \rightarrow$  Dispersionsrelationen:  $\omega = \omega(k)$

(iv) Ergebnisse:

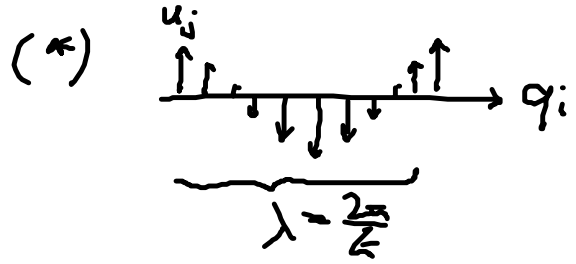
2 statische Solarmoden:  $\omega_{1/2} = 0$  (\*)

1 statische Temp./Dichtemode:  $\omega_3 = 0$  (\*\*)

2 Schallwellen:  $\omega_{4/5} = \pm c_s |k|$

mit  $c_s = \sqrt{\frac{5kT}{3m}}$  ... Schallgeschw.

keine Dämpfung



(\*\*)  $\underline{\nabla} \delta T + \frac{\hbar}{n} \underline{\nabla} \delta n = 0!$

