Erhaltungssätze:

Teilchenzahl: $\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q \cdot j = 0$ (4.34)

Impuls: $mn\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla_q\right) u_i = \nabla_j T_{ij} + n F_i$ (4.36)

Energie: $n\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \nabla_q\right) e = -\underline{\nabla} \cdot q + T_{ij} \nabla_i u_j$ (4.38)

Hydrodynamik ohne Dissipation: mit f_0

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} n = -\nabla_q \cdot (n\underline{u}) && (4.42) \\ &mn \frac{d}{dt} \underline{u} = -\nabla_q P + n \underline{F}, \quad P = n k_B T && (4.43) \\ &\frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \nabla_q \cdot \underline{u} && (4.44) \end{aligned}}$$

4.4.3 Hydrodynamische Gleichungen mit Dissipation

- Boltzmann-Gl.:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}[f] = \left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} \\ &\text{mit } \mathcal{L}[f] = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \nabla_q + \underline{F} \cdot \nabla_p\right] \\ &\left(\frac{\underline{p}}{m} = \underline{u} + \underline{c}\right) = \left[\frac{d}{dt} + \underline{c} \cdot \nabla_q + \frac{1}{m} \underline{F} \cdot \nabla_c\right] \end{aligned}} \quad (4.45)$$

- Problem: $\left.\frac{df_0}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = 0$, aber $\mathcal{L}[f_0] \neq 0$, f_0 s. (4.29)

  ... lokales GG

- Näherungslösung: „1. Ordnung"

  (i) $f = f_0(1 + \Delta)$ mit $\Delta \ll 1$

(ii) Relaxationszeitnäherung für Stoßterm:

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{\text{Stoß}} = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$$

in Gl. (4.45): $\mathcal{L}[f_0 + f_0\Delta] = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$ & $\mathcal{L}[f] \approx \mathcal{L}[f_0]$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\Delta = -\tau \frac{1}{f_0} \mathcal{L}[f_0] = -\tau \mathcal{L}[\ln f_0]} \qquad (4.46)$$

berechne $\mathcal{L}[\ln f_0]$ & Annahme: $n(q,t)$, $u(q,t)$, $T(q,t)$
in f_0 lösen (4.42)–(4.44)

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \boxed{\begin{aligned} & f = f_0(1+\Delta) \\ & \text{mit } \Delta = -\tau \frac{m}{k_B T}\left(c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3} c^2\right) D_{ij} - \tau \left(\frac{m c^2}{2 k_B T} - \frac{5}{2}\right) \frac{c_i}{T} \nabla_i T \end{aligned}} \qquad (4.47)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right) \ldots \text{ Deformationsrate}$$

• Mittelwerte:

$$\boxed{\langle A \rangle = \int d^3p \; A f_0 (1+\Delta) = \langle A(1+\Delta) \rangle_0} \qquad (4.48)$$

• Spannungstensor „1. Ordnung":

$$T_{ij} \overset{(4.35)}{=} -m \langle c_i c_j \rangle \underset{(4.48)}{\overset{(4.47)}{=}} -m\left[\langle c_i c_j \rangle_0 - \frac{\tau m}{k_B T} \left\langle c_i c_j \left(c_k c_l - \frac{\delta_{kl}}{3} c^2\right)\right\rangle_0 D_{kl}\right]$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$\langle c_i c_j \rangle_0 = n \frac{k_B T}{2m} \delta_{ij}$

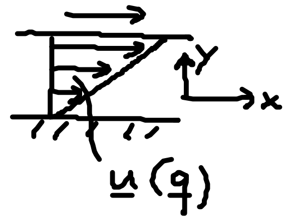
$\langle c_i c_j c_k c_l \rangle_0 = n \left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 \times$

$(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$

$$\boxed{\begin{aligned} & T_{ij} = -P\delta_{ij} + \underbrace{2\eta\left(D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} D_{kk}\right)}_{T'_{ij} \ldots \text{ visköser Spannungstensor}} \\ & \text{mit } P = n k_B T \ldots \text{ Druck} \\ & \qquad \eta = n k_B T \tau \end{aligned}} \qquad (4.49)$$

Deutung: (i) Scherströmung:

- $D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} D_{kk} \neq 0 \longrightarrow T'_{ij}$



- nicht zeitumkehr invariant:

$$T'(-D_{ij}) = -T'(D_{ij})$$

$\longrightarrow$ Dissipation

$\longrightarrow$ Relaxation von Schermoden ins GG

- $Sp\,\underline{\underline{D}} = D_{ii} = \mathrm{div}\,\underline{u}$ ... Spur von $\underline{\underline{D}}$

also: $D_{ij} - \frac{1}{3}\mathbb{1}\,\mathrm{div}\,\underline{u} = 0$ für $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3}\mathbb{1}\,\mathrm{div}\,\underline{u}$!! reine Kompression

(ii) keine extra Volumenviskosität:

kein Beitrag: $T'_{ij} \sim D_{ii} = \mathrm{div}\,\underline{u}$

- Wärmestromdichte: „1. Ordnung"

$$q_i \overset{(4.18)}{=} \left\langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \right\rangle \overset{(4.47)}{=} -\frac{m\tau}{2}\left\langle \left(\frac{mc^2}{2k_BT} - \frac{5}{2}\right) c_i c_k c^2 \right\rangle_0 \frac{\nabla_k T}{T}$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\boxed{\underline{q} = -\kappa \nabla_q T \quad \text{mit } \kappa = \frac{5}{2} n \frac{k_B^2 T}{m}\tau} \quad (4.50)$$

... thermische Leitfähigkeit

$\underline{q} \sim -\nabla_q T \longrightarrow \underline{q}$ gleicht $\nabla_q T$ aus

$\longrightarrow$ Relaxation ins GG

(4.34) $\longrightarrow$

(4.36) $\nabla_j T_{ij} = \ldots$, $F_i = 0$

(4.38) $-\nabla_q \cdot \underline{q} \rightarrow T_{ij}\nabla_i u_j$

$ne = \frac{m}{2}\langle c^2 \rangle = \frac{3}{2} n k_B T$

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\underline{\nabla}_q \cdot (n\underline{u}) \quad (4.51)$$

$$mn\frac{d}{dt}\underline{u} = -\nabla_q P + \eta \nabla_q^2 \underline{u} + \frac{1}{3}\eta \nabla_q(\nabla_q \cdot \underline{u}) \quad (4.52)$$

$$\frac{d}{dt}T = \underbrace{\frac{2\kappa}{3nk_B}\nabla_q^2 T}_{\text{von } -\nabla_q \cdot \underline{q}} - \frac{2}{3}T\underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} + \frac{2}{3nk_B}T'_{ij}\nabla_i u_j \quad (4.53)$$

Bem: (1) Gl. (4.52) $\equiv$ Navier-Stokes-Gl. für kompressible Flüssigkeiten

aber: Viskosität für reine Kompression: $\eta_K + \frac{1}{3}\eta$ statt $\frac{1}{3}\eta$!

(2) Gl. (4.53): für $\nabla_i u_j = 0 \longrightarrow$ reine Diff. Gl. für T

$T'_{ij} \nabla_i u_j$ ... nichtlinearer Term in $\underline{u}$!

- Modenanalyse: (wie in Kap. 4.4.2)

2 diffusive Schermoden:

Dispersionsrelation: $\omega_{1/2} = -i \frac{\eta}{m\bar{n}} k^2$ mittlere Dichte

$\left[e^{-i\omega t + \underline{k}\cdot\underline{r}} \right]$

Dämpfungsrate $-i\omega = \frac{\eta}{m\bar{n}} k^2 \longrightarrow 0$ für $k \to 0$

$\hat{=}$ hydrodynamische Moden

1 diffusive „Temperaturmode" ω_3

2 gedämpfte Schallwellen

$$\omega_{4/5} = \pm c_s k - i k^2 \left(\frac{2\eta}{3m\bar{n}} + \frac{2\kappa}{15k_B\bar{n}} \right) + O(\tau^2)$$

5. Statistische Ensemble

- <u>Ziel</u>: $\boxed{\text{Zugang zu makroskop. Eigenschaften von Vielteilchen-Systemen durch Mittelung über viele mikroskop. Realisierungen}}$

insbesondere: $\underbrace{S, U, F, H, G}_{\text{thermodynam. Potentiale}}$ ...

- <u>Weg</u>: Wähle Ensemble von Mikrozuständen durch Festlegung von Randbedingungen $\longrightarrow$ Charakterisierung der Makrozustände

- <u>Beachte</u>: $\boxed{\text{Im thermodynam. Limes } N \to \infty \text{ sind alle Ensemble äquivalent}}$

5.1. Mikrokanonisches Ensemble

- **Def.:** Alle zugänglichen Mikrozustände eines abgeschlossenen Systems (also mit Energie U = konstant und $V, N, \ldots$ = konstant) bilden das mikrokanon. Ensemble

- Liouville Theorem: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\{\varrho, H\}$

stationärer Zustand = thermisches GG: mögl. Lsg.: $\varrho_{eq} = \varrho(H=U) =$ konstant

$\longrightarrow$ Postulat gleicher a priori Wahrscheinlichkeit für Mikrozustände s mit Energie U:

$$p(s) = \frac{1}{g(U)}$$

mit $g(U)$ … Anzahl aller zugänglichen Mikrozustände mit Energie U [und $V, N, \ldots$]

- Postulat der Boltzmannschen Entropie:

$$\boxed{S := k_B \ln g(U)} \quad (5.2)$$

mit $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J/K$ … Boltzmannsche Konstante

- QM: i indiziert Eigenzustände mit Energie-EW E

- klass. Mechanik:

$$\boxed{g(U) = \frac{1}{N!} \int_U^{U+\Delta} \frac{1}{h^{3N}}\, d\Gamma \quad \text{mit } d\Gamma = \prod_i d^3q_i\, d^3p_i} \quad (5.3)$$

Bem.: (i) h^{3N} … Phasenraumvolumen / Zustand

aus Dimensionsgründen: $[h] = Js =$ Einheit Wirkung

Begründung: $dq_\alpha \, dp_\alpha \sim \hbar$

(ii): $N!$, weil ununterscheidbare Teilchen !!

NB: wichtig, damit S extensiv

(iii): $g(U) = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \times$ Phasenraumvolumen von Energieschale mit $U \leq H(q,p) \leq U + \Delta$

Δ ... Energie immer „unscharf" wegen äußerer Störungen

- Bsp: idealer Gas: $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$

Volumen $\Omega(U)$ von $3N$-dim. Hyperkugel mit Radius $U = H$

$$\Omega(U) \overset{\text{o.B.}}{\sim} V^N \, U^{3N/2} \quad (5.4)$$

$$\text{also } g(U) = \frac{1}{h^{3N} N!} \left[\Omega(U) - \Omega(U-\Delta) \right] \quad (5.5)$$

Berechne: $\frac{\Omega(U - \Delta = xU)}{\Omega(U)} \overset{(5.4)}{=} x^{3N/2}$

Zahlenwert: $x = 0.999999$, $N = 10^{23}$

$$\longrightarrow \quad \frac{\Omega(xU)}{\Omega(U)} = (1-10^{-6})^{3N/2} = e^{3N/2 \ln(1-10^{-6})}$$

$$\approx e^{-3N/2 \, 10^{-6}} = e^{-3/2 \cdot 10^{17}} \approx 0 \,!!!$$

also: $\boxed{\text{Volumen von Hyperkugeln in hochdim. Raum auf dünne Schale mit Radius } U \text{ konzentriert}}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{g(U) = \frac{1}{N!\, h^{3N}} \, \Omega(U)}$$