Prof. Holger Stark (Sprechstunde: Fr 11:30-12:30 in EW 709)
Dr. Johannes Blaschke (Sprechstunde: Mi 10:00-11:00 in EW 708)

11. Übungsblatt – Statistische Physik

Abgabe/Vorrechnen: Mo. 06.07.2015 im Tutorium (16:00 - 17:30 EW 731)

S Aufgabe 33 (4 Punkte): *Paarkorrelationsfunktion und Strukturfaktor*

Für die Beschreibung kritischer Phänomene und der Struktur von Flüssigkeiten spielt die *Paarkorrelationsfunktion*

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho^2}\langle \sum_{i=1}^{N} \sum_{i \neq j} \delta(\mathbf{r_1} - \mathbf{r}_i)\delta(\mathbf{r_2} - \mathbf{r}_j)\rangle$$

eine wichtige Rolle. Sie ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ zu treffen, wenn ein willkürlich herausgegriffenes Referenzteilchen am Ort $\mathbf{r} = 0$ ist. Im thermischen Gleichgewicht hängt $g(\mathbf{r})$ eines Fluides aus sphärischen Teilchen nur vom Betrag $r = |\mathbf{r}|$ ab. Die Fouriertransformierte von $g(\mathbf{r}) - 1$ führt auf den *statischen Strukturfaktor*

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \rho \int d^3r\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}(g(\mathbf{r}) - 1)\,. \tag{6.43}$$

Dieser ist direkt messbar in Streuexperimenten. Er bestimmt den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei Streuung von z.B. Licht oder Neutronen an dem betrachteten System.
Betrachten Sie ein verdünntes Hartekugel-Gas mit dem Wechselwirkungspotential

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty & , \quad |\mathbf{r}| < R \\ 0 & , \quad |\mathbf{r}| > R \end{cases} \,,$$

und zeigen Sie, dass der statische Strukturfaktor durch

$$S(\mathbf{k}) = 1 + \frac{4\pi R\rho}{k^2}\cos(kR) - \frac{4\pi\rho}{k^3}\sin(kR)\,.$$

gegeben ist.
Hinweis: Für verdünnte Gase kann die radiale Verteilungsfunktion $g(r)$ genähert werden durch $g(r) \approx e^{-\beta V(\mathbf{r})}$.

M Aufgabe 34: *Strukturfaktor und thermodynamische Größen*

a) Berechnen Sie für das verdünnte Hartekugel-Gas aus Aufgabe 32 die isotherme Kompressibilität:

$$\kappa_T = \frac{\beta}{\rho}\lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} S(\mathbf{k})\,. \tag{6.53}$$

b) Berechnen Sie mit κ_T die thermische Zustandsgleichung. Entwickeln Sie den Druck nach der Dichte und vergleichen Sie B_2 und B_3 mit den Resultaten aus Aufgabe 28.

S Aufgabe 35 (6 Punkte): *Paarkorrelationsfunktion eines Elektronengases*
Der Strukturfaktor von Elektronen in einem Metall kann näherungsweise durch

$$S(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{3}{2}\hat{k}(1 - \frac{1}{3}\hat{k}^2) & , \quad \hat{k} \leq 1 \\ 1 & , \quad \hat{k} > 1 \end{cases} \,,$$

beschrieben werden. Darin bezeichnet $\hat{k} \equiv |\mathbf{k}|l$ eine dimensionslose Wellenzahl, und l eine durch die Elektronendichte n (und den Spin s) charakterisierte Längeneinheit, $\rho l^3 = (2s+1)/(48\pi^2)$.

(a) Skizzieren Sie $S(\mathbf{k})$ als Funktion von $\hat{k}$.

(b) Berechnen Sie die Paarkorrelationsfunktion $g(\mathbf{r})$ des Elektronengases.

(c) Wie lautet $g(\mathbf{r} = \mathbf{0})$? Diskutieren Sie $g(\mathbf{r})$ für sehr kleine Abstände, $r \ll l$. Welche physikalische Ursache haben die beobachteten Abweichungen vom Verhalten eines klassischen idealen Gases?

(d) Skizzieren Sie $g(\mathbf{r})$ als Funktion von $\hat{r} = |\mathbf{r}|/l$ für Spin $s = 1/2$.