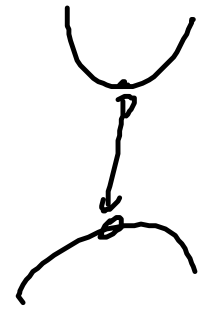
X. Halbleiter im Magnetfeld (Fortsetzung)

Als Beispiel ein 2D Magneto-Exziton:

Wir sehen uns jetzt ein Elektron-Loch Paar im Magnetfeld!



Dort Schrödingergl.:

$$H^{mx}\,\psi(\underline{r}_e,\underline{r}_h) = E\,\psi(\underline{r}_e,\underline{r}_h)$$

(mx Magneto Exziton)

Der Hamiltonoperator hat die Form

$$H^{mx} = \sum_{i=e,h} \frac{1}{2m_i}\left(p_i - \frac{e_i}{2}\,\underline{B}\times\underline{r}_i\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,|\underline{r}_e-\underline{r}_h|}$$

mit $e_e = -e$ und $e_h = e$

Jetzt wird eine kanonische Transformation verwendet:

$$\underline{U(\underline{r})} = \exp\left(-i\,\frac{e}{2}\,\underline{B}\cdot(\underline{R}\times\underline{r})\right)\psi(\underline{r}_e,\underline{r}_h)$$

Transformation wobei $\underline{r}$ und $\underline{R}$ Relativ- und Schwerpunktskoordinaten.

Dann wird der Hamiltonoperator modifiziert:

$$H_r^{mx}\,U(\underline{r}) = E\,U(\underline{r})$$

mit

$$H_r^{mx} = \sum_i \frac{1}{2m_r}\left(p - \frac{e}{2}\,\underline{B}\times\underline{r}_i\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\,r}$$

Wir haben also nur noch die Relativbewegung zu lösen!

Wir skalieren dies mit der Länge l_1 ergibt sich:

$$H_r^{ex} = E_0 \, 2 \sum_{i=e,h} \underbrace{\frac{\hbar\omega_c}{2E_0}}_{\lambda} \left[\left(i\frac{\partial}{\partial\varrho_x} + \frac{e_i}{l_e}\varrho_x\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial\varrho_y} - \frac{e_i}{l_e}\varrho_y\right)^2\right) - \frac{2\lambda^{\frac{1}{2}}}{\varrho}$$

$$\lambda = \frac{a_0^2}{e^2} \leftarrow \text{Bohrradius des Excitons}$$

Hier ist E_0 3d - Exciton Rydberg Energie.

Der Parameter λ gibt an ob die Coulomb Bindungsenergie oder der Effekt des Magnetfeldes überwiegt.

Je nach dem kann das Magnetfeld oder die Coulomb WW als Störung aufgefasst werden.

Wir entwickeln die Wellenfkt in Landau Zuständen

$$U_\alpha = \sum_n c_{\alpha n} \phi_{nn} = \sum_n c_{\alpha n} \underset{\text{Loch}}{|n\rangle} \underset{\text{Elektron}}{|n\rangle}$$

Das ergibt für die stationäre Schrödinger Gl.

$$\sum_n \left[2\lambda\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\delta_{nn'} - V_{nn'}\right] c_{\alpha n} = E_\alpha c_{\alpha n'}$$

Mit den Coulombelementen

$$V_{nn'} = \langle n'|\langle n'| \, V(\varrho) \, |n\rangle|n\rangle = \frac{1}{L^2}\sum_k V_k \langle n'|\langle n'| e^{ik\varrho} |n\rangle|n\rangle$$

mit 2D Potential $V(\varrho) = \frac{(2\lambda^{\frac{1}{2}})}{\varrho}$ und $V_k = \frac{4\pi\lambda^{\frac{1}{2}}}{k}$

Im Folgenden müssen die Coulomb Matrix Elemente berechnet werden.

Lange Rechnung (s. Haug-Koch):

$$V_{nn} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk \, k \, V_k \, |J_{n'n}|^2$$

$$\text{mit } J_{n'n} = \sqrt{\frac{N!}{N'!}} \left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^{N'-N} e^{-\frac{k^2}{4}} L_N^{(N'-N)}\left(\frac{k^2}{2}\right)$$

$N' = \sup(n', n) \qquad N = \inf(n', n)$

Wie bei den Exzitonen, kann man eine Gleichung konstruieren

$$\left[H_v^{mx}(\underline{r}) + E_g - \hbar(\omega + i\delta) \right] P_{vc}(\underline{r}) = d_{cv} \underbrace{\mathcal{E}(t)\,\delta(\underline{r})\,l^2}_{\text{Optischer Treiberterm}}$$

Dabei kann $P_{vc}(\underline{r})$ bzgl. der Eigenfkt. U_α von H_v^{mx} dargestellt werden:

$$P_{vc}(\underline{r}) = \sum_\alpha c_\alpha U_\alpha(\underline{r})$$

Lösung der obigen Gleichung

$$c_\alpha = \frac{d_{cv}\, U_\alpha(r=0)\, l^2\, \mathcal{E}}{E_0 E_\alpha + E_g - \hbar(\omega + i\delta)}$$

Dabei ist die optische Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \frac{P(\omega)}{\mathcal{E}(\omega)} = \sum_\alpha \frac{|d_{cv}|^2\, |U_\alpha(r=0)|^2}{E_0 E_\alpha + E_g - \hbar(\omega + i\eta)}$$

$$U_\alpha(r=0) \underset{\uparrow}{=} \sum_{n n'} \langle r=0 | n\rangle |n'\rangle \langle n'| \langle n | \alpha\rangle$$

Vollständigkeit der Landaulevel.

Für $\phi_{nn'}(r)$ verschwindet für $r \to 0$ wie $r^{|n-n'|}$
daher trägt nur $n = n'$ bei

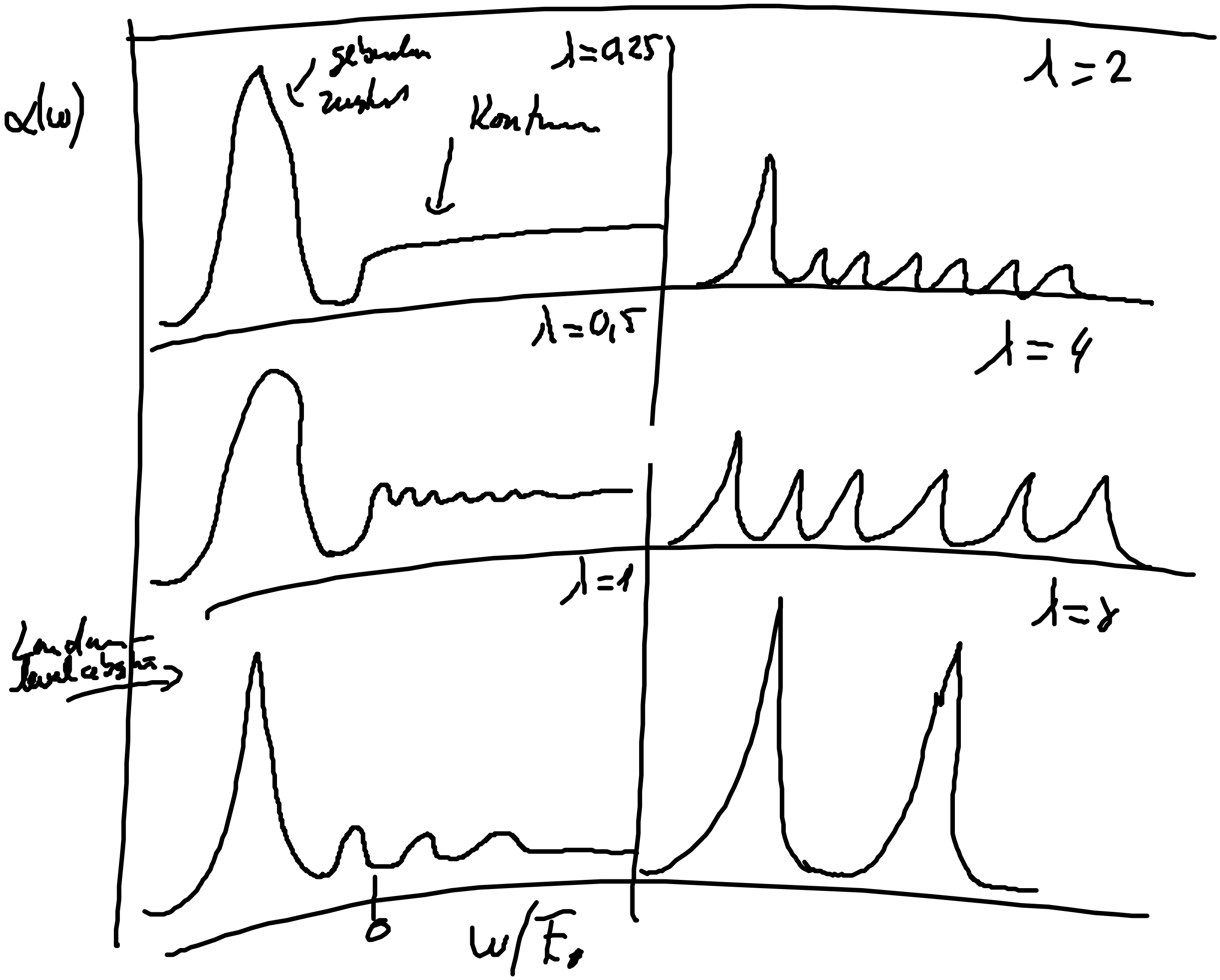
Wobei

$$|\langle r=0 | n\rangle |n\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi l^2}$$

$$\| \chi(\omega) \propto \frac{\lambda}{2\pi} \sum_\alpha \frac{|\sum_n |\langle \alpha | n\rangle |n\rangle|^2}{E_\alpha + (E_g - \hbar(\omega + i\eta))/E_0}$$

magneto-exciton

$$\lambda = \frac{a_0^2}{l^2} \qquad a_0 = \frac{\hbar^2\, 4\pi\, \varepsilon_0 \varepsilon_r}{e^2 m_r} \qquad l^2 = \frac{\hbar}{eB}$$



XI Polaritonen

Das elektromagnetische Feld wechselwirkt mit der Materie, dies führt zur Ausbildung von neuen Quasiteilchen zw. polarisierten Materie und deren Photonen.

Beispiele:

(1) Exciton Polaritonen (z.B. zwischen zwei Bändern)

$$B^+_{\nu,K} = \sum_{k,k'} \delta(\underline{K}-(k-k'))\, \mathcal{4}_\nu\left(\frac{k+k'}{2}\right) a^+_{c k, s}\, a_{v k', s}$$

Exciton Wellenfunktion im k-Raum

$$= \sum_k \mathcal{4}_\nu\left(k - \frac{\underline{K}}{2}\right) a^+_{c, \underline{K}, s}\, a_{v, \underline{K}-k, s}$$

Nehmen wir nun ein bestimmtes Exziton bei $\underline{K}=0$

$$[B_{0,0}, B^+_{0,0}]_- = \sum_{\underline{k},\underline{k}'} \mathcal{4}_0(k)\, \mathcal{4}_0^*(k')\, [a^+_{vk,s}\, a_{ck}, a^+_{ck'}\, a_{vk'}]_-$$

$$= \sum_k |\mathcal{4}_0(k)|^2 \underbrace{\left(a^+_{vks}\, a_{vks} - a^+_{cks}\, a_{cks} \right)}_{\simeq 1 \text{ nur im Gleichgewicht}}$$

$\simeq 1$ also fast Bosonen

(2) Die transversal optischen Phononen

$$P(x) = \sum_{i,q} P_{i,q} \left(b_{i,q} + b^+_{i,-q}\right) e^{iq\cdot x}$$

dieses sind Bosonen,

(3) Häufig quantisiert man auch Polaritonen phänomenologisch wie in (2) für optische Phononen!

Einschub klassische Motivation des Polaritons

Maxwellgl.

(i) $\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\underline{E}} + \mu_0 \dot{\underline{P}}$ (ii) $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

Einfache Materialgl. - harmon. Oszillator

(iii) $\ddot{\underline{P}} + \omega_0^2 \underline{P} = \chi \varepsilon_0 \underline{E}$

Anwenden einer Fourierentwicklung

$E_x = E_{x0}\, e^{ikz - i\omega t}$; $B_y = B_{y0}\, e^{ikz - i\omega t}$

$P_x = P_{x0}\, e^{i(kz - \omega t)}$

Setzen wir das in die Maxwellgl. ein.

(i) $\frac{\omega}{c^2} E_{x,0} + \omega \mu_0 P_{x,0} - k B_{y,0} = 0$

(ii) $k E_{x0} - \omega B_y = 0$

(iii) $\varkappa \varepsilon_0 E_x + (\omega^2 - \omega_0^2) P_x = 0$

In Matrix form

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} & \omega \mu_0 & -k \\ k & 0 & -\omega \\ \varkappa \varepsilon_0 & \omega^2 - \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ P_x \\ B_y \end{pmatrix} = 0$$

Die Determinante ergibt:

$$\boxed{\omega^4 - \omega^2 \underset{\Uparrow}{(} \omega_0^2 + \varkappa + c^2 k^2) + \omega_0^2 c^2 k^2 = 0}$$

Dispersionsrelation! (Auswertung in der QM)

Das Photonische Feld ist: (Vektorpotential)

$$A = \sum_{\substack{k\sigma \\ \uparrow \\ \text{Polarisationsrichtung}}} A_\sigma (c_{k\sigma} + c^+_{k\sigma}) e^{i k \cdot r}$$

Wir betrachten jetzt vorrangig den TO-Phonon Fall

Der Hamiltonoperator des Systems ist: (nur eine Polarisationsrichtung)

$$H = \underbrace{\sum_k E_{pt,k} c_k^+ c_k}_{\text{Photon}} + \sum_k \underbrace{E_{pol,k} b_k^+ b_k}_{\text{Polarisation, also Phonon oder Exziton etc.}}$$

$$+ \underbrace{H_{\text{Kopplung}}}_{\text{Kopplungsterme}}$$

Die Kopplung mit dem Dipolfeld hat die Form $\underline{E} \cdot \underline{P}$?

<u>Begründung</u>: nur so ergibt es beim Verwenden von Hamilton Bewegungsgl. die Maxwellgl. mit $\nabla \cdot E \propto \nabla \cdot P + \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$E \quad \alpha - (c_k - c_{-k}^+)$ wegen $E \alpha - \dot{A}$

$(\; P \quad \alpha \quad (b_k + b_k^+))$

Damit muß die Form der Kopplung so aussehen

$$H_{kopplung} = \sum_k E_{kopplung,k} \left(c_k^+ b_k - c_k b_k^+ - c_k b_{-\underline{k}} + c_{-k}^+ b_k^+ \right)$$

Die Kopplung stört!

Ich möchte einen harm. Oszillator haben! (ungekoppelten)

Ansatz: (Hopfield Transformation)

$$\alpha_{\underline{k}} = w\, c_k + x\, b_{\underline{k}} + y\, c_{-k}^+ + z\, b_{-k}^+ \qquad (**)$$

Wunsch:

$$H = \sum_k \left[E_{k,1}\, \alpha_{1\underline{k}}^+ \alpha_{1\underline{k}} + E_k^{(2)} \alpha_{2k}^+ \alpha_{2k} \right]$$

diese Form zu erreichen!

Wenn H die Form hätte, würde gelten:

$$[\alpha_k, H] = E_k\, \alpha_k$$

Wir kommutieren jetzt $H_{kopplung}$ und $(**)$

und erhalten eine Gleichung der Form:

$$[\alpha_k, H_0]_- = [w\, c_k + x\, b_k + y\, c_k^+ + z\, b_k^+, H]_-$$

$$= w\, [c_k, H_0]_- + x\, [b_k, H_0]_- + y\, [c_k^+, H_0]_- + z\, [b_{-k}^+, H_0]_-$$

$$= w\, E_{pt,k}\, c_k + x\, E_{pol,k}\, b_k - y\, E_{ph,k}\, c_{-k}^+ - z\, E_{pol,k}\, b_{-k}^+$$

$$[\alpha_k, H_{koppl}]_- = w\, [c_k, H_{koppl}]_- + x\, [b_k, H_{koppl}]_- + y\, [c_k^+, H_{koppl}]_- + z\, [b_k^+, H_{koppl}]_-$$

$$= w\, E_{kopp,k}\, b_k - x\, E_{kopp,k}\, c_k - E_{kopp,k}\, b_{-k}^+ + z\, E_{kopp,k}\, c_{-k}^+$$

+ weitere Terme

$$E_k \left(w\, c_k + x\, b_k + y\, c_{-k}^+ + z\, b_{-k}^+ \right) = E_k\, \alpha_k$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & c_k & b_k & c^\dagger_{-k} & b^\dagger_{k} \\
\hline
c_k & & & & \\
b_k & & & & \\
c^\dagger_{-k} & & & & \\
b^\dagger_{-k} & & & &
\end{array}
\quad
\begin{pmatrix}
E_{ph,k}-E_k & -E_{kopp,k} & 0 & -E_{kopp,k} \\
E_{kopp,k} & E_{ph,k}-E_k & E_{kopp,k} & 0 \\
0 & -E_{kopp,k} & -E_{pt,k}-E_k & E_{kopp,k} \\
E_{kopp,k} & 0 & -E_{kopp,k} & -E_{ph,k}-E_k
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0
$$

Das ist nur erfüllt wenn die Determinante verschwindet

$$(E_k)^4 - (E_k)^2 \left(E_{pt,k}^2 + E_{ph,k}^2\right) + E_{ph,k}^2 E_{ph,k}^2 + 4 E_{pt,k} E_{ph,k} E_{kopp,k}^2 = 0$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann die Energie des Polaritons E_k berechnet.

Mit der Gleichung kann w, x, y, z bestimmt werden.