I') Wiederholung und das was wir machen

1.) Blick auf Struktur der Physik (hochtrabend!)

einheitliche Beschreibung
(relativistische) v. Teilchen/Feld

Quantenfeld-
theorie

em. Felder
schnelle Teilchen
klassische Elektrodynamik
relativistische Mechanik

Quantenmechanik
langsame Teilchen

„Quanten sind
wichtig“

„relativistisch ist richtiger“

Mechanik

Teilchen, Feld $\hat{=}$ Begriffe

die statistische Physik als „Vielteilchenbeschreibung“
befindet sich „über“ der Struktur

2.) Historische Kommentare zur Entwicklg. QM

M. Plank (1858 – 1947) Wirkungsquantum
Schwarzkörperstrahlung

A. Einstein (1879 – 1955) Lichtquanten hypothese

N. Bohr (1882 – 1962)
A. Sommerfeld (1868 – 1958)
halbklassische Quantentheorie „Atommodelle"

W. Heisenberg (1901 – 1976) Matrizenmechanik,
Unschärferelation
Feldquantisierung

E. Schrödinger (1887 – 1961) Wellenmechanik

W. Pauli (1900 – 1958) Spin – Statistik Theorem

P. Dirac (1902 – 1984) relativistische Verallg.
Schrödingergl spin $\frac{1}{2}$
abstrakte Formulierung QM

R Feynman (1918 – 1988) Quantenelektrodynamik

3) Die relativistische Energie - Impuls Beziehung

wenn Objekte $\frac{v}{c} < 1$ mit Geschwindigkeit v in die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c kommen:

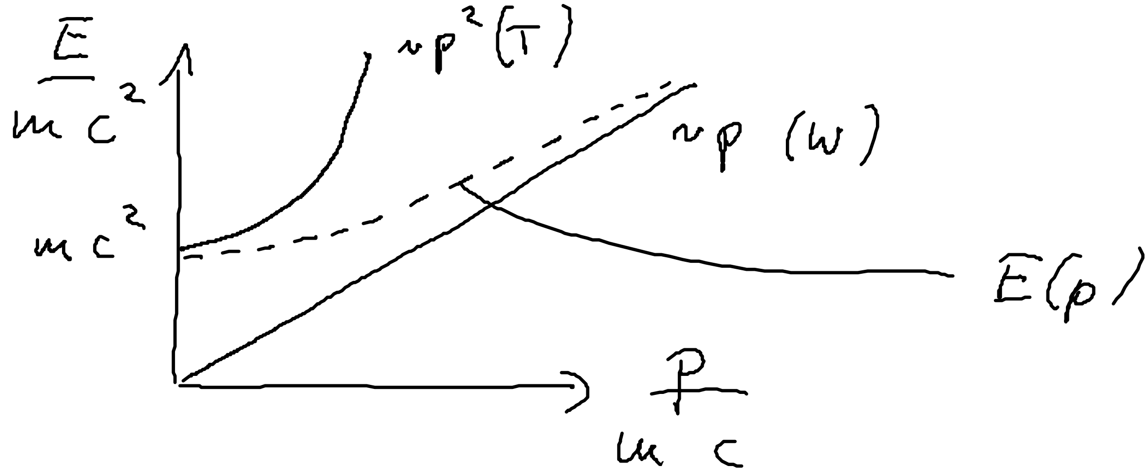
$$E(p) = \left(m^2c^4 + c^2p^2\right)^{1/2} \cong \begin{cases} mc^2 + \frac{p^2}{2m} & f\ p \ll mc \\ cp & f\ p \gg mc \end{cases}$$

relativist. Energie-Impulsbeziehung
m - Ruhemasse, p - Impuls, E - Energie

- $\underline{\frac{p^2}{2m}}$ aus klassische, nicht relativist. Mechanik: Teilchen
- pc Welle, wenn: de Broglie $p = \hbar K$, $E = \hbar\omega$

— Zshg. Welle - Teilchen Bild $\rightarrow$ $\omega = cK$

Offensichtlich „interpoliert" $E(p)$ zwischen Welle / Teilchen



Eine <u>wirklich</u> einheitliche Beschreibung von Teilchen und Welle wird nur mit einer <u>relativistischen</u> $E(p)$ und <u>quantenmechanischen</u> Theorie mögl. sein

$$E = \hbar\omega,\ p = \hbar k$$

4.) Die beiden Bausteine: Quantenmechanik und Relativistik – eine kurze Wdh. der Begriffe

a) Axiome der Quantentheorie (Schrödinger Wellen)

1) Zustand eines Teilchens wird durch Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$ in einem linearen Vektorraum (Hilbertraum) beschrieben.

2) Observable sind hermitesche Operatoren $\{\underline{A}\}$.

3) QM hat statistische Interpretation, Mittelwert von $\underline{A}$ ist im Exp. mit

$$\langle \underline{A} \rangle = \int d^3r \, \psi^*(r,t) \, \underline{A} \, \psi(r,t)$$

4.) Die Zeitentwicklung (Dynamik) ist durch Schrödingergleichung festgelegt

$$i\hbar \, \partial_t \psi = \underline{H} \psi \,, \quad \underline{H} - \text{Hamiltonoperator}$$

5.) Bei einer Messung von $\underline{A}$ geht der ursprüngliche Zustand ψ in einen Eigenzustand $\varphi_n(r)$ von $\underline{A}$ über $(\underline{A} \varphi_n = a_n \varphi_n)$

b) Relativistische Beschreibung

1) Raum und Zeit werden verknüpft:
Lorentztransformation zw. Inertialsystemen

2) für Verknüpfung werden mathematisch 4er Vektoren eingeführt:

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad (1 \text{ Ereignis}) = (ct, x, y, z)$$

$\mu : (0 \cdots 3)$ griechisch

$i : (1 \cdots 3)$ latein

$$x_\mu = (ct, -\vec{r}) = (ct, -x, -y, -z)$$

$$(x, y, z) \stackrel{\wedge}{=} (x_1, x_2, x_3)$$

3) Eigenzeitintervall $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$

ist invariant in verschieden Inertialsystemen

eine Ereigniskurve muß als Funktion von τ

$$x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))$$

4) Definition des Impulses als Fkt von τ

$$p^\mu = m \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) \quad , \quad d\tau \text{ einsetzen}$$

$$= \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \frac{d}{dt} (ct, x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

$$p^\mu(t) = (m(t)c, m(t)\dot{x}_1, m(t)\dot{x}_2, m(t)\dot{x}_3(t))$$

5) p_0 (erste Komponente) wird mit $\frac{E}{c}$ identifiziert

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \quad \text{also: } \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{c} \quad *$$

6) Ein 4er Vektor hat eine Länge die invariant beim Wechsel d. KS

Betragsquadrat: $p_\mu p^\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$

Summenkonvention

des Impulsvierervektors

7) Relativistische Energie-Impulsbeziehung:

$$p_\mu p^\mu = \underline{\underline{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2}}} = \underbrace{\overset{*}{\frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m^2 v^2}_{}$$

→ umstellen nach E: ← $\underline{\underline{m^2c^2}}$

$$E(p) = \left(m^2c^4 + p^2c^2\right)^{1/2}$$

5) Ausblick

- Verallgemeinerung Schrödingergleichung auf relativistische Gleichungen, Folgerungen

- Grenzfall $\frac{v}{c} \ll 1 \longrightarrow$ relativistische Korrekturen, z.B. Spin-Bahn

- Einteilchentheorie: Strahlen Materie
  Feld-Materie Wechselwirkung
  Streutheorie

- Vielteilchentheorie: Elektronengase

- Quantenfeldtheorie || fundamentale WW (?)

II Relativistische Wellengleichungen

Schrödingergl. kann nur nicht relativistisch sein:

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi$$

1. Ordnung

2. Ordnung $\Longrightarrow$ Raum und Zeit sind

unfair behandelt

2 Dgl. zur relativist. Beschreibung

spendieren einer weiteren Zeitableitg. $\downarrow$ Klein-Gordon Gleichung (spin 0)

weglassen einer Ortsableitung $\downarrow$ Diracgleichung (spin $\frac{1}{2}$)

1) Die Klein-Gordon Gleichung

1.1.) Die Herleitung geht schnell:

Schrödinger gl. aus $E = \frac{p^2}{2m}$ mit

$$\underbrace{E \to i\hbar\partial_t \, , \, \vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}}$$

$$i\hbar\partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi$$

nehme wir doch einfach ein relativistisches $E(p)$

$$E^2 = (p^2c^2 + m^2c^4)$$

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4)\psi$$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0}$$

Diese Gleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung für ein relativistisches Teilchen, ist Standard-Wellengleichung mit Masseterm

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi(x^\mu) = 0$$

kovariante Schreibweise