2. Diracgleichung für freie Teilchen

- Klein Gordon Gl. 2 Orts- und 2 Zeitableitungen
  → Spin 0 Teilchen, weil kein Spinfreiheitsgrad da

- weitere Mgl. der relativist. Invarianz (Gleichbehandlung von Raum/Zeit): nur erste Ableitungen

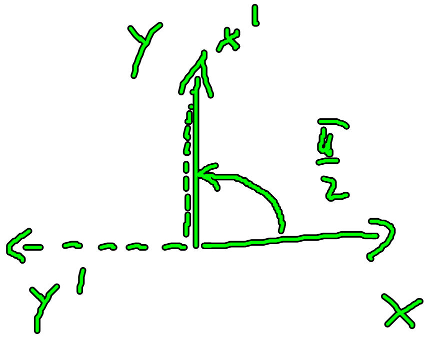
$$i\hbar \partial_t \Psi = c\,\alpha^k \underbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_k}_{\text{Impuls}} + \underbrace{\beta m c^2}_{\text{Ruheenergie}}$$

Lichtgeschwindigkeit (Dimension)

$k: x, y, z$
x_1, x_2, x_3

α, β sind Koeffizienten

im Prinzip der einfachste Ansatz, funktioniert leider nicht wenn α^k, β nur Zahlen sind das sieht man an Drehung der Koordinatenachsen in x, y → läßt die Physik nicht unverändert, ändert die Gleichung!



$$\Sigma \to \Sigma'$$

$$\to \left.\begin{aligned} x &= -y' \\ y &= x' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \partial_x &= -\partial_{y'} \\ \partial_y &= \partial_{x'} \end{aligned}$$

d.h. die momentane Diracgleichung ist nicht unter Drehung invariant! Vektorgl. okay, denn dort wurde auch die Einheitsvektoren gedreht

$$\left(\vec{e}_x = -\vec{e}_{y'}, \Rightarrow \underline{\vec{e}_x \partial_x} \to -\vec{e}_{y'} \cdot -\partial_{y'} = \underline{\vec{e}_y \partial_y}\right)$$

2.1. Bestimmung der Dirac-Koeffizienten

Dirac: ψ sind Vektoren $\psi \to \vec{\psi}$

dann können die α, β Matrizen sein

$$i\hbar \partial_t \vec{\psi} = \left(c \hat{\alpha}^k p_k + \hat{\beta} mc^2\right) \vec{\psi}$$

3 Komponenten des Impulsoperators werden mit je 1 Matrix multipliziert

$$(\hat{\alpha}^x p_x + \hat{\alpha}^y p_y + \hat{\alpha}^z p_z)$$

Forderung um α, β zu bestimmen:
ebene Wellen sollen die relativistische $E(p)$ ergeben

$\underline{H}$ als rechte Seite der Gleichung oben $\vec{\psi}$ wird nochmal auf die Gleichung angewendet / durch $\hbar^2$

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \vec{\psi} = \left(c\,\hat{\alpha}^l \frac{\hbar}{i}\partial_l + \hat{\beta} mc^2\right)\left(c\,\hat{\alpha}^k \frac{\hbar}{i}\partial_k + \hat{\beta} mc^2\right)\vec{\psi}$$

$$-\partial_t^2 \vec{\psi} = -\frac{c^2}{2}\underbrace{\left(\hat{\alpha}^l\hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k\hat{\alpha}^l\right)}_{\text{symmetrisiertes Produkt, weil Matrizen nicht vertauschen}}\partial_l\partial_k \vec{\psi}$$

$$+ \frac{c}{\hbar i} m c^2 \underbrace{\left(\hat{\alpha}^l \partial_l \hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^k \partial_k\right)}_{\text{geordnet ausmultipliziert}} \vec{\psi}$$

*

$$+ \frac{\hat{\beta}^2 m^2 c^4}{\hbar^2}\vec{\psi}$$

$$* \quad \hat{\alpha}^l \partial_l \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k \partial_k = \hat{\alpha}^k \partial_k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k \partial_k$$

weil Zahlen einträge

wählen die Matrizen so, daß $E(p)$ relativistisch richtig rauskommt; das tut es wenn Klein-Gordongl. für die einzelnen Komponenten von $\vec{\psi}$ gilt,

und das gilt, wenn:

$$\hat{\alpha}^l \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^l = 2 \delta_{kl} \underline{1}$$

$$\hat{\alpha}^k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k = 0 \longrightarrow \left(\hat{\alpha}^k = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^k \hat{\beta}^{-1}\right)$$

$$\hat{\beta}^2 = \underline{1} \longrightarrow \left(\hat{\beta} = \hat{\beta}^{-1}\right)$$

Diese Anforderungen definieren eine „Matrixalgebra"

Matrizen die das erfüllen werden später angegeben.

<u>Komponentenzahl von ψ?</u>

a) $sp(\hat{\alpha}^k) = -sp(\hat{\beta}\hat{\alpha}^k\hat{\beta}^{-1}) = -sp(\hat{\alpha}^k\hat{\beta}^2) = -sp(\hat{\alpha}^k)$

zyklisch vertauscht

→ Summe der Eigenwerte von $\hat{\alpha}^k$ muß Null sein

b) weil $(\hat{\alpha}^k)^2 = \underline{1}$ (siehe 1. Bedingung)

kann die Matrix nur die Eigenwerte ± 1 besitzen

c) aus (a+b) folgt → Dimension muß gerade sein

z.B. 2 und 4

d) 2 nicht möglich, die Bedingungen können mit 4 erfüllt werden

Die Bedingungen werden durch folgende $\hat{\alpha}^k$ erfüllt:

$$\hat{\alpha}^k = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}^k \\ \hat{\sigma}^k & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \hat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu zeigen, daß alle Bedingg von oben erfüllt sind
(zu Hause)

damit im Prinzip Diracgleichung festgelegt.

2.2. Die Diracgleichung in kovarianter Form *

die ist schnell zu merken

kovariant heißen Gleichungen die in allen KS (Inertialsystem) dieselbe Form haben und dabei relativistisch invariant sind, d.h. man muß sie mit Vierervektoren schreiben können:

Dirac mal $\frac{\hat{\beta}}{c}$, durch $\hbar$, $x_0 = ct$

$$-i\left(\underbrace{\underline{\hat{\beta}\,\partial_0}}_{0\text{ Komponente}} + \underbrace{\hat{\beta}\,\underline{\hat{\alpha}^i\,\partial_i}}_{1-3\text{ Komponent}} + i\frac{mc}{\hbar}\underline{1}\right)\vec{\psi} = 0$$

$\vec{\gamma}$ als Vierervektor definieren

$$\hat\gamma^\mu = (\hat\gamma_0, \hat\gamma_1, \hat\gamma_2, \hat\gamma_3)$$

$$\hat\beta = \hat\gamma^0 = \begin{pmatrix}\hat 1 & \hat 0\\ \hat 0 & -\hat 1\end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix}\hat 0 & \hat\sigma^i \\ -\hat\sigma^i & \hat 0\end{pmatrix}$$

$$0 = \Big(-i \underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu}_{\not\partial} + \frac{mc}{\hbar}\hat 1\Big)\vec\psi \longleftrightarrow \underbrace{\Big(-i\not\partial + \frac{mc}{\hbar}\hat 1\Big)\vec\psi = 0}_{\text{Schnellste Notation der Diracgleichung}}$$

$$\gamma^\mu a_\mu \hat{=} \not a$$

2.3. Die Diracgleichung erfüllt eine Kontinuitätsgleichung und auch die Wahrscheinlichkeitsdichteinterpretation

$$i\hbar\partial_t\vec\psi = c\hat\alpha^k p_k \vec\psi + \hat\beta mc^2\vec\psi$$

$$-i\hbar\partial_t\vec\psi^+ = c(p_k\vec\psi)^+\hat\alpha^{+k} + \psi^+\hat\beta^+ mc^2$$

„+" hermitisch konjugieren (adjungieren)

erste Gleichung mit $\vec\psi^+\cdot$, zweite Gleichung mit $\cdot\vec\psi$ multiplizieren und abziehen voneinander

$$\partial_t\Big(\underbrace{\vec{\Psi}^+\cdot\vec{\Psi}}_{\rho(r,t)}\Big) = -\partial_k\Big(\underbrace{c\,\vec{\Psi}^+\alpha^k\Psi}_{j^k(r,t)}\Big)$$

kann als Wahrscheinlichkeitsdichte und Strom interpretiert werden, analog Schrödinger gleichung $\rho = \underbrace{|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2+|\Psi_3|^2+|\Psi_4|^2}_{\geq 0}$

2.4. Teilchen – Antiteilchenlösungen der Diracgleichung

$\vec{\Psi}$ als Lösung wird „Spinor" genannt

$\vec{\Psi} = (\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2)$ 2 Zweiervektoren $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2$

c-Zahl Komponenten

Ansatz: $\vec{\Psi} = (\vec{\varphi}_1(\cancel{r}), \vec{\varphi}_2(\cancel{r}))\,\underbrace{e^{-i\frac{E}{\hbar}t + i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}}_{\text{ebene Welle ansatz}}$

Einsetzen in Diracgleichung:

$$E\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_1\\ \vec{\varphi}_2\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\hat{0} & \vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}\\ \vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p} & \hat{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_1\\ \vec{\varphi}_2\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)\cdot\vec{p} = \hat{\sigma}_1 p_1 + \hat{\sigma}_2 p_2 + \hat{\sigma}_3 p_3$$

$$E\vec{\varphi}_1 = c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}\,\vec{\varphi}_2 + mc^2\vec{\varphi}_1\,, \quad E\vec{\varphi}_2 = c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}\,\vec{\varphi}_1 - mc^2\vec{\varphi}_2$$

2 gekoppelte Gleichungen für $\vec{\varphi}_1$ und $\vec{\varphi}_2$

als homogenes Gleichungssystem, damit $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2$ jeweils nicht Null werden muß Determinante verschwinden

$\longrightarrow$ relativist. $E(p)$ $\longrightarrow$ keine neue Info

$$\vec{\varphi}_2 = \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + mc^2}\,\vec{\varphi}_1 \,,$$

$\lambda = \pm$ für die 2 Zweige der Energie-Impuls beziehung

$$\vec{\Psi}_{p\lambda}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + mc^2}\,\vec{\varphi}_1 \end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_\lambda(p)}{\hbar}t - \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)} \cdot \text{Normierg.}$$

noch nicht bestimmt ist $\vec{\varphi}_1$, wird folgendermaßen bestimmt: da $|\Psi_{p\lambda}|^2$ normiert als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann, muß auch ein Normierungsfaktor mitgenommen werden

$\vec{\varphi}_1$ kann also ein Eigenvektor sein, aber $\vec{\varphi}_1$ kann durch die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ aufgespannt werden

$$\vec{\psi}_{p\lambda m_s} = \left(\frac{mc^2 + E_\lambda(p)}{2E_\lambda(p)} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ \frac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + mc^2}\,\vec{\chi}_{m_s} \end{pmatrix} e^{i(\cdots)}$$

Normierung
(ohne Beweis)

$\vec{\chi}_{m_s} \to m_s$ unverändert $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(es gibt 2 m_s)

Es entsteht ein weiterer Freiheitsgrad in $\vec{\psi}$:

3 Freiheitsgrade $\vec{\psi}$ zu klassifizieren über Quantenzahlen

$\vec{\psi}$ ist eine ebene Welle mit

einem Impuls $\vec{p}$

einer Energie auf dem positiven oder negativen Zweig ($\pm$)

einer weiteren Quantenzahl m_s