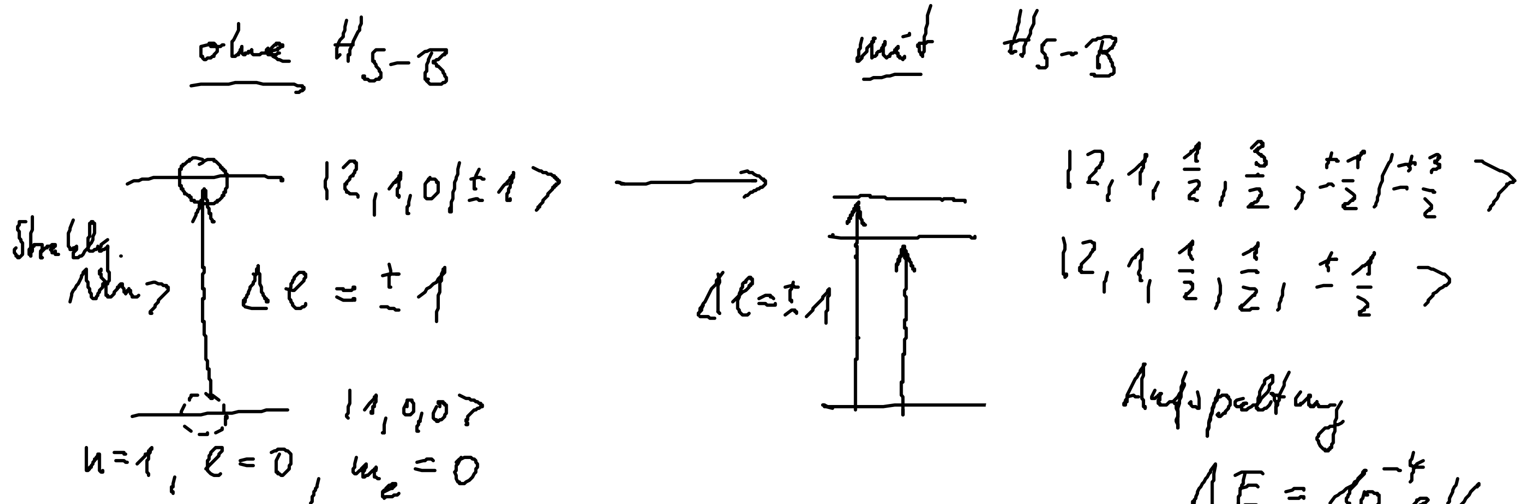
2.5 Anwendungsbeispiele: Von Energiedubletts zu Quanten-teleportation

2.5.1. Energiedubletts und Feinstruktur des H-Atoms

In Atomen die ein Leuchtelektron haben (1 Außenelektron) wird die sogenannte Dublettaufspaltung beobachtet: man hat 2 Spektrallinien statt eine die man im naiven H-Atom (n, l, m_e) beobachten würde.

Experiment: Absorption von elektromagnetischer Strahlung – welche Spektralanteile werden absorbiert



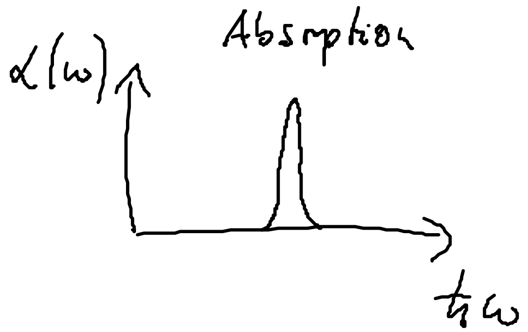
ohne Spin

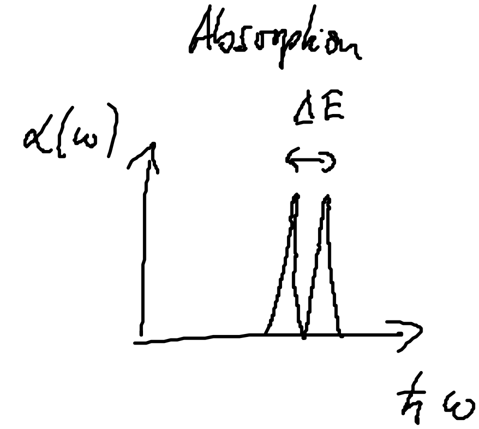
$|n, l, m_e\rangle$

mit Spin

$|n, l, s=\frac{1}{2}, j, m_j\rangle$

optisch Übergang ist
nur zwischen bestimmten
Niveaus erlaubt,
Auswahlregeln !





ÜA: $$\Delta E = Ry \frac{Z^2 (Z\alpha)^2}{n^4} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j + \frac{1}{2}} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{137}$$ Feinstrukturkonstante

Zustände mit verschiedenen j werden energetisch verschoben im Vergleich zu Zustand mit festem l des H/Alkaliatoms (Kernladungszahl Z) ohne Einbeziehung der Spin-Bahn-Kopplung
Es kommt zu einer teilweisen Aufhebung der Entartung. Die Berechnung von ΔE läuft über die Berechnung von $\langle nlsjm_j | H_{S-B} | nlsjm_j \rangle$

H_{S-B} enthält $\vec{l} \cdot \vec{s}$,

wird berechnet über

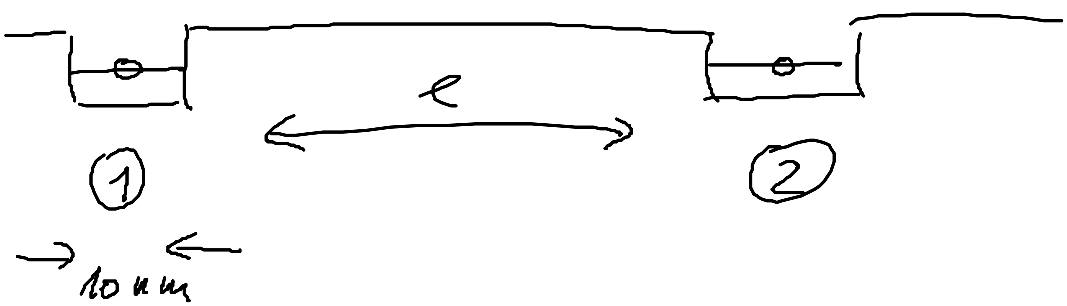
$$(\vec{l} + \vec{s})^2 = \vec{l}^{\,2} + \vec{s}^{\,2} + 2\, \vec{s} \cdot \vec{l} = \vec{j}^{\,2}$$

$$\vec{s} \cdot \vec{l} = \frac{1}{2} \left(\vec{j}^{\,2} - \vec{l}^{\,2} - \vec{s}^{\,2} \right)$$

kann dann direkt berechnet werden als Matrixelement.

2.5.2. Addition zweier Spins

Situation: 2 lokalisierte Elektronen
heutzutage mögl. über nm bis µm/mm (l)



10^{-9} m

Charakterisierung durch Spin fkt.

$\vec{\chi}^{(1)}_{\pm\frac{1}{2}}$ $\vec{\chi}^{(2)}_{\pm\frac{1}{2}}$

mögl. Zustandskombinationen (Dimension 4)

1) $\uparrow$ $\uparrow$

2) $\uparrow$ $\downarrow$

3) $\downarrow$ $\uparrow$

4) $\downarrow$ $\downarrow$

$$\underbrace{\underline{H}_{1/2}}_{i} = \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + V_i \right) \hat{1} \qquad H_i \vec{\varphi}_i = \varepsilon_i \vec{\varphi}_i$$

$$i = 1, 2$$

$$\vec{\varphi}_1 = f(r_1)\, \vec{\chi}^{\,①}_{\pm\frac{1}{2}} = |\uparrow, \downarrow\rangle_1 \qquad \vec{\varphi}_2 = f(r_2)\, \vec{\chi}^{\,②}_{\pm\frac{1}{2}} = |\uparrow, \downarrow\rangle_2$$

Ortsfunktion ein Teilchen im Kasten

Lösungen des Gesamtsystems: $\underline{H}_{ges} |\vec{\varphi}\rangle = \varepsilon_{ges} |\vec{\varphi}\rangle$

$$|\vec{\varphi}\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} |i\rangle_1 |j\rangle_2$$

$$\{i, j\} = \{\uparrow, \downarrow\}$$

$$\underline{H} |\varphi\rangle = \sum_{ij} a_{ij} \left(\underline{H}_1 + \underline{H}_2 \right) |i\rangle_1 |j\rangle_2$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} \left(\varepsilon_1 |i\rangle_1 |j\rangle_2 + \varepsilon_2 |i\rangle_1 |j_2\rangle \right)$$

Energie des
1 Teilchens
im Kasten

2. Teilchens

$$= \underbrace{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}_{\text{Eigenwerte}} \sum_{ij} \underbrace{a_{ij} \, |i\rangle_1 \, |j\rangle_2}_{\text{Eigenfunktion}}$$

Basiskonstruktion: analog zu Bahn-Spin-Drehimpulsaddition nehmen wir die Quantenzahlen aus der Spin-Spin-Addition

$$\vec{S} = \vec{\hat{s}}_1 + \vec{\hat{s}}_2$$

mgl. Quantenzahl analog zu dem Verfahren bei

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{\hat{s}} \Longrightarrow j, m_j$$

$$\vec{\hat{S}} = \vec{\hat{s}}_1 + \vec{\hat{s}}_2 \Longrightarrow S, M_S$$

große Buchstaben bedeuten Mehrteilcheneigenschaften

$$M_S = m_{s_1} + m_{s_2} = \{1, 0, -1\} \quad \text{aus } m_s = \pm\frac{1}{2}$$

$$S = |M_S| = \{1, 0\}$$

habe also 4 Basisfunktionen $|S, M_S\rangle$

$$|1, -1\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$$

$$|1, +1\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1\right)$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1\right)$$

Behauptg ist:

$$\hat{S}^2 |S, M_S\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S, M_S\rangle$$

$$\hat{S}_3 |S, M_S\rangle = \hbar M_S \, |S, M_S\rangle$$

in kompletter Analogie zur Drehimpuls – Spin addition

müßte f. jeden angegeben Zustand überprüft werden

mache das gleich f. einen $|1,0\rangle$.

Bemerkungen:

Das Zweispinsystem verfügt über 3 Zustände
mit Gesamtspin $S = 1$ („Triplett")
und einen Zustand mit $S = 0$ („Singulett")

Singuletts haben antiparallele
Spins $\uparrow \downarrow$ $S=0$ („naives klassisches Vektormodell")

Tripletts haben parallele Spins $\uparrow \downarrow$ $\uparrow \downarrow$ $\rightarrow \rightarrow$

$S = 1$

Die beiden Systeme Triplett und Singulett treten oft als Realisierungen eines Materiesystems auf, z.B. Ortho- und Parahelium.

- Beweis des Ansatzes f. $|S, M_S\rangle$

hier nur für $|1,0\rangle$; zeigen der Gültigkeit der Eigenwertgleichungen:

(a) $\hat{S}_3 \, |1,0\rangle \overset{!}{=} \hbar \, 0 \, |1,0\rangle$

(b) $\hat{\vec{S}}^2 \, |1,\overset{M_S}{0}\rangle = \hbar^2 \, 1(1+1) \, |1,0\rangle$

(zu a) $(\hat{s}_1^3 + \hat{s}_2^3)|1,0\rangle$

3-te Komponente
des 1. Teilchens

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1\right)$$

$$= \left(\left(-\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2}\right) + \left(-\frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2}\right)\right)|1,0\rangle$$

$$= 0\hbar \, |1,0\rangle$$

zu b) $\hat{\vec{S}}^2 \, |1,0\rangle = \left(\overbrace{(\hat{S}_1)^2}^{(\hat{s}_1^1 + \hat{s}_2^1)^2} + (\hat{S}_2)^2 + (\hat{S}_3)^2\right)|1,0\rangle$

$$= (\hat{s}_1^1)^2 + (\hat{s}_2^1)^2 + 2\hat{s}_2^1 \hat{s}_1^1$$

$$+ (\hat{s}_1^2)^2 + (\hat{s}_2^2)^2 + 2\hat{s}_2^2 \hat{s}_1^2$$

$$+ \left(\hat{S}_1^3\right)^2 + \left(\hat{S}_2^3\right)^2 + 2\,\hat{S}_2^3\,\hat{S}_1^3$$

$$\underbrace{\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2}_{\text{durch Anwendung von } \hat{\vec{S}}_i^2 |\downarrow\rangle_i = \frac{3}{4}\hbar^2 |\downarrow\rangle_i} \; \underbrace{+ \frac{1}{2}\hbar^2}_{\text{durch ausrechnen}}$$

$$= 1(1+1)\hbar^2 |1,0\rangle \Longrightarrow S=1 \checkmark$$

Basis im Zweispinraum gefunden.

2.5.3. Verschränkte Zustände zweier Teilchen

Experimente an einzelnen / gekoppelten Quantensystemen können die QT <u>fundamental testen</u>!

Ein Beispiel sind Test von Konsequenzen aus der Existenz von verschränkten Zuständen.

Sehe System 2er Teilchen an,

beliebige Wellenfunktion

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij}\, |i\rangle_1 \, |j\rangle_2$$

$\underline{H}_1$ $\underline{H}_2$

1 2

$$\underbrace{|\uparrow\rangle_1 \text{ oder } |\downarrow\rangle_1}_{|i\rangle_1} \qquad \underbrace{|\uparrow\rangle_2 \text{ oder } |\downarrow\rangle_2}_{|j\rangle_2}$$

Der Gesamtraum aus $\underline{H}_1$ und $\underline{H}_2$ ist ein Produktraum $\underline{H} = \underline{H}_1 \otimes \underline{H}_2$.

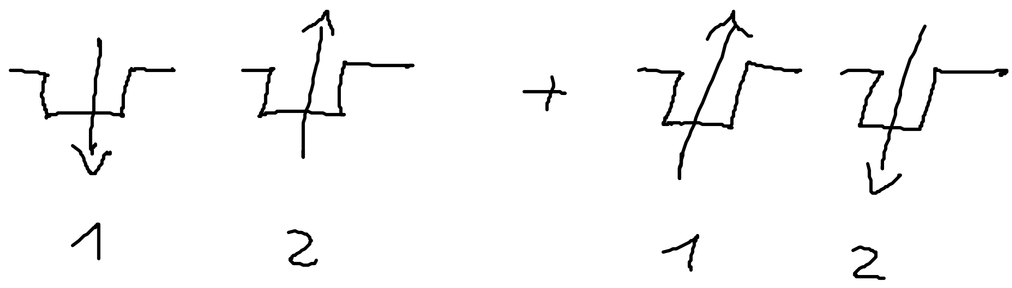
Der Gesamtzustand zweier Teilchen heißt verschränkt wenn er <u>nicht</u> als einfaches Produkt von einem Zustand aus 1 und einem aus 2 geschrieben werden kann: <u>Beispiele</u>:

$|1,-1\rangle = |\downarrow\rangle_1 \, |\downarrow\rangle_2$ ist <u>nicht</u> verschränkt

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1\right)$$

ist verschränkt

der verschränkte Zustand ist Überlagerung:



ist heute mit Laserfeldern erzeugbar.

Messung an verschränkten Zustand:
mit je 50%iger Wahrscheinlichkeit
mißt man entweder $|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$ oder $|\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1$
(Interpretation Meßprozeß)

$$\psi = \sum_n c_n \varphi_n \xrightarrow[\text{Messg.}]{} \begin{array}{l}\text{System in } \varphi_n \\ \text{mit } |c_n|^2 \text{ Wahrscheinlichkeit}\end{array}$$

→ Egal welche der Möglichkeiten man erhält,
wenn 1 gemessen wird und damit
$\uparrow_1$ oder $\downarrow_1$ festgelegt ist, so ist gleichzeitig

auch der Zustand des 2 ten Elektrons festgelegt

($\downarrow_2$ oder $\uparrow_2$).

Bemerkungen:

(a) Erstaunlich wird das, wenn man die beiden Systeme in großer räumlicher Distanz hat dann hat offensichtlich eine Messg. an 1 einen sofortigen Einfluß auf das Meßergebnis an 2.

Also glaubt man an Verschränkung als fundamentales Prinzip oder man glaubt nicht die QT!

Experimentell ist Verschränkg. gefunden,

SRT als Gegenargument kann entkräftet werden

(b) Verschränkung ist die Verallgemeinerung der Schrödingerskatze

1	Katze	$\downarrow$ Tot	$\uparrow$ Lebendig
2	Atom	$\uparrow$ Atomzerfall	$\downarrow$ Kein Zerfall

$\downarrow$

Gift

an makroskopisch Systeme wie z. B.
Katze wird Verschränkung nicht
beobachtet (Umgebung!)

2.5.4. Teleportation

Teilchenzustand (El, Ph) wird in Maschine eingelesen und derselbe Zustand wird an einem anderen Ort wieder ausgelesen:
Nicht das Teilchen, sondern der Zustand wird übertragen!

Prinzip:

3 Teilchen nötig (1 2 3)

1 2 3 4

O ⊗ O O

Alice

Bellzustands-messung

stellt Info zur Verfügg.

„2" Lampe leuchtet

eine unitäre Transformation am Teilchen 3

Bob möchte $|\psi_0\rangle_3$ kennen

$$|\psi_B\rangle_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_3 - |\uparrow\rangle_2 |\downarrow\rangle_3\right)$$

2 3

Quelle für einen verschränkten Zustand

1

$$|\psi_0\rangle_1 = c_\downarrow |\downarrow\rangle_1 + c_\uparrow |\uparrow\rangle_1$$