3) Quantisierung nichtwechselwirkender Felder

allgemeines Schema, Bsp.: Schrödingerfeld

(a) Lagrangeformalismus f. Felder $\psi(r,t)$
(b) Definition des Feldimpulses $\pi(r,t)$
(c) Übergang zu Operatoren $\underline{\psi}(r,t)$, $\underline{\pi}(r,t)$
(d) Einführung von Vertauschungsregeln $[\underline{\psi},\underline{\pi}] = \ldots$
(e) Aufstellen des Hamiltonoperators $\underline{H}$
(f) Bewegungsgleichungen f. Feldoperatoren $\dot{\underline{\psi}} = \ldots$
(g) Entwicklung nach Feldmoden $\underline{\psi} = \sum_i \varphi_i a_i$

d.h. jetzt: Feldquantisierung

Kap. 4: Zustände des Feldes
Zugang zu experimentellen Ergebnissen
(Erwartungswerte ...)

(a) Lagrangeformalismus für Felder

Man nehme sich die klassische Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi_i, \dot{\psi}_i, t)$, $\psi_i(r,t)$ ist klass. Feld mit i-Komponente bzw. i bezeichnet verschiedene Felder

Die Lagrangedichte muß die „klassischen" Bewegungsgleichungen reproduzieren: Übungsblatt 2

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i/x_\mu}} = 0 \,, \quad x^\mu = (ct, x_1, x_2, x_3)$$

→ gibt z.B. Maxwellgleichungen oder Schrödingergl.

$$\left(\psi_{i/x_\mu} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu} \right)$$

Beispiel: Schrödingerfeld $\psi(r,t)$ genügt der Schrödingergleichung $i\hbar\dot{\psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r,t)\right)\psi$

Folgende $\mathcal{L}$ liefert diese Gleichung:

$$\underset{(i=1,\, i=2)}{\mathcal{L}(\psi, \psi^*}, \psi_{/x_\mu}, \psi^*_{/x_\mu}, t) =$$

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_{l=1}^{3} \psi^*_{,x_l}\, \psi_{,x_l} - U \psi^* \psi$$

Auf Übungsblatt 2 wurde gezeigt, daß $\mathcal{L}$ das Schrödingerfeld richtig beschreibt.

1 Besonderheit: bei Schrödingerfeld nennt man Verfahren 2. Quantisierung.

(um mit Feldern und Teilchen auf 1 Stufe der Beschreibung zu kommen)

(b) Impulsvariable

Man bestimme die Impulsvariable Π_{ψ_i} für das Feld ψ_i, $\Pi_{\psi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i}$.

Die Definition des Impulses ist nötig um analog zur Schrödinger-Teilchenmechanik ein Paar zueinander kanonisch konjugierter Variablen zu finden:

$$x, p \longrightarrow \psi_i, \Pi_{\psi_i}$$

Beispiel : $\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar \frac{\psi^*}{2}$

(c) Feldoperatoren

Man betrachte die kanonisch Felder (ψ_i, Π_{ψ_i})

als Operatoren : $\psi_i \rightarrow \underline{\psi}_i$, $\Pi_{\psi_i} \rightarrow \underline{\Pi}_{\psi_i}$

Analogie : $x \rightarrow \underline{x}$, $p \rightarrow \underline{p}$

Beispiel $\psi \rightarrow \underline{\psi}$, $\psi^* \rightarrow \underline{\psi}^+$

$\Pi_\psi \rightarrow \underline{\Pi}_\psi$, $\Pi_{\psi^*} \rightarrow \underline{\Pi}_{\underline{\psi}^+}$

Die neuen Operatoren heißen Heisenbergoperatoren

und sind im Sinne des Heisenbergbilds Funktionen

von der **Zeit** : $\underline{\psi}(r, \underline{t})$, $\underline{\psi}^+(r, t)$

$\underline{\psi}$ heißt Heisenberg vernichtungsoperator

$\underline{\psi}^+$ heißt — " — erzeugungsoperator

Die Interpretation :

$\underline{\psi}^+$ erzeugt ein Elektron zur Zeit t am Ort r

$\underline{\psi}$ vernichtet — " — .

(wird später verständlich werden)

(d) Vertauschungsregeln

Man fordert zeitgleiche Vertauschungsregeln für die kanonischen Variablen / Operatoren:

$$[\psi_i(r,t), \Pi_{\psi_j}(r',t)]_\pm = i\hbar\,\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Analogie: $[x_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$

$$([\underline{A},\underline{B}] = \underline{A}\,\underline{B} \pm \underline{B}\,\underline{A})$$

Es kann Plus- und Minusquantisierung auftreten:
Plusquantisierung f. Fermionen,
Minusquantisierung f. Bosonen.

Später wird gezeigt, daß diese Art von Quantisierung

automatisch die Symmetrieeigenschaften der

Vielteilchenwellenfunktionen (Bosonen: symm.
Fermionen: antisymm.)

hervorruft.

Beispiel: $\left[\psi_i(r,t), \psi_i^{+}(r',t)\right]_{\mp} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

also kann das Schrödingerfeld Bosonen und Fermionen beschreiben.

(c) Hamiltonoperator

Man formuliere zunächst die klassische Hamiltondichte: $\mathcal{H} = \sum_i \dot{\psi}_i \, \pi_{\psi_i} - \mathcal{L}$

(Analogie: $H = \sum_i \dot{x}_i p_i - L$)

Dann konstruiere man aus der Hamiltondichte den Hamiltonoperator $\int d^3r \, \mathcal{H} = H \to \underline{H}$

Beispiel $\quad \mathcal{H} = \dot{\psi}\,\frac{i\hbar}{2}\,\psi^* - \dot{\psi}^*\,\frac{i\hbar}{2}\,\psi - \mathcal{L}$ (siehe a)

$$\mathcal{H} = + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_e \frac{\partial \psi^*}{\partial x_e} \frac{\partial \psi}{\partial x_e} + u\,\psi^* \psi$$

$$H = \int d^3r \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_e \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} \psi + u\,\psi^* \psi \right)$$

= partielle Integration

$$H \to \underline{H} = \int d^3r\, \underline{\psi}^\dagger(r,t) \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + u(r,t) \right)} \underline{\psi}(r,t)$$

Der Hamiltonoperator ist jetzt in Heisenbergoperatoren formuliert, der Schrödinger H-Operator wird zwischen $\psi^\dagger$ und ψ gesandwicht.

(f) Bewegungsgleichungen

Man formuliere die Bewegungsgleichungen für die Feldoperatoren (Analogie: Schrödingergleich.) mit Hilfe der Heisenbergbewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\psi_i(r,t) = \frac{i}{\hbar}\left[\underline{H}, \psi_i(r,t)\right] + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right)_{ext}$$

(Analogie: Poissonklammer der klass. Mechanik.

$$\frac{d}{dt}A = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\{A, B\} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right)$$)

Beispiel: Berechne der Dynamik für $\underline{\psi}(r,t)$, gerade aus:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\underline{\psi}(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\underline{\psi}(r,t) + u(r,t)\underline{\psi}(r,t)$$

aus Verwendung von Heisenberggleichung und Vertauschungsrelation ($\sim \delta(r-r')$)

hier nicht vorgerechnet, wir entwickeln Felder nach Moden

(g) Entwicklung des Quantenfelds $\hat{\psi}_i(\vec{r},t)$ nach Moden

- Ziel: QFT etwas mehr verstehen, insbesondere:

  man kann Teilchen als Elementaranregung (oder Moden) von Feldern verstehen.

Bsp:

Maxwellfeld → Photonen

Teilchen: Schrödingerfeld (Diracfeld) → Elektronen

Schallfeld → Phononen

sind als Moden von Feldern zu verstehen

„Quasiteilchen"

dieselbe Mathematik für all diese Objekte

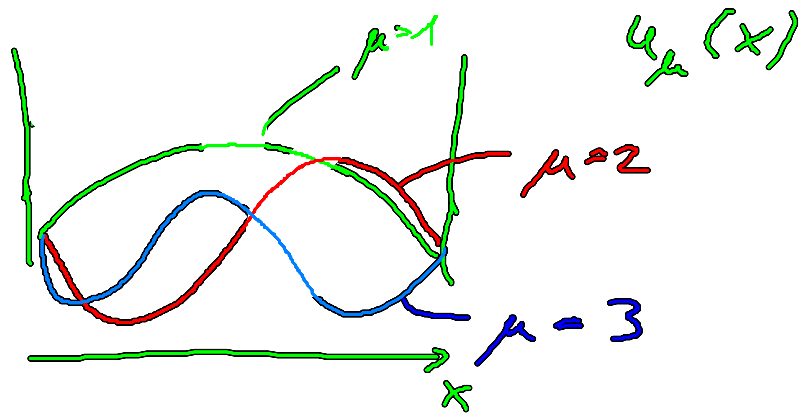
Vorgehen: Feldoperatoren werden nach vollständigem System von Funktionen (Moden) $u_{i\mu}(\vec{r})$ entwickelt:

$$\underline{\Psi}_i(r,t) = \sum_\mu u_{i\mu}(r)\,\underline{a}_{i\mu}(t)$$

$\underline{a}_{i\mu}$ trägt Operatoreigenschaften

$u_{i\mu}$ ist vollständiges System

<u>Bsp</u> Feld im Resonator:



Später: $\underline{a}_1$ <u>vernichtet</u> 1 Photon in Mode 1

neue Operatoren $\underline{a}$, $\underline{a}^+$ $\quad$ ($\underline{\Psi}_i^+ = \sum u^*_{i\mu}(r)\,\underline{a}^+_{i\mu}(t)$

unterliegen auch der $\pm$ Quantisierung:

$$[\underline{a}_{i\mu}(t), \underline{a}^+_{j\mu'}(t)]_\pm = \delta_{ij}\,\delta_{\mu\mu'}$$

$$[\underline{a}^{(+)}_{i\mu}(t), \underline{a}^{(+)}_{j\mu'}(t)]_\pm = 0$$

Beweis: $\left[\underline{\Psi}_i(r,t), \underline{\Psi}_j^+(r',t)\right]_\pm =$

$$\sum_{\mu\mu'} \left[\underline{a}_{i\mu}(t), \underline{a}^+_{j\mu'}(t)\right] u_{i\mu}(r)\, u^*_{j\mu'}(r') =$$

$$\overset{!}{=} \delta_{ij}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

wenn $[a, a^+] = \ldots$ eingesetzt wird, stimmen die Vertauschungsrelationen.

Aufschreiben von $\underline{H}$ am Beispiel Schrödingerfeld:

$$\underline{H} = \int d^3r\, \underline{\Psi}^+(r,t) \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u\right)}_{\underline{H}_S} \Psi(r,t)$$

$$= \int d^3r \sum_{i\mu} u^*_{i\mu}(r)\, a^+_{i\mu}(t)\, \underline{H}_S \sum_{j\mu'} u_{j\mu'}(r)\, a_{j\mu'}(t)$$

$u_{j\mu}$ wird als das vollständige System von $\underline{H}_S$ gewählt: $\underline{H}_S u_{i\mu} = \varepsilon_{i\mu} u_{i\mu}$

$$\boxed{\underline{H} = \sum_{i\mu} \varepsilon_{i\mu}\, \underline{a}^{+}_{i\mu}(t)\, \underline{a}_{i\mu}(t)}$$

Das ist der Hamiltonoperator eines freien, nicht-WW Quantenfelds ($\psi_i(\vec{r},t)$)

Es gibt eine starke Analogie zum Bild des harmonischen Oszillators in Erzeuger / Vernichter-Darstellung:

Damit kann man das Schrödingerfeld ($\Pi_\psi = \psi^*$) so verstehen, daß die Teilchen als Elementaranregg. von Mode μ des Felds auftreten, weil

$a^{+}_{\mu} a_{\mu}$ wird sich als Teilchenzahl-operator erweisen.