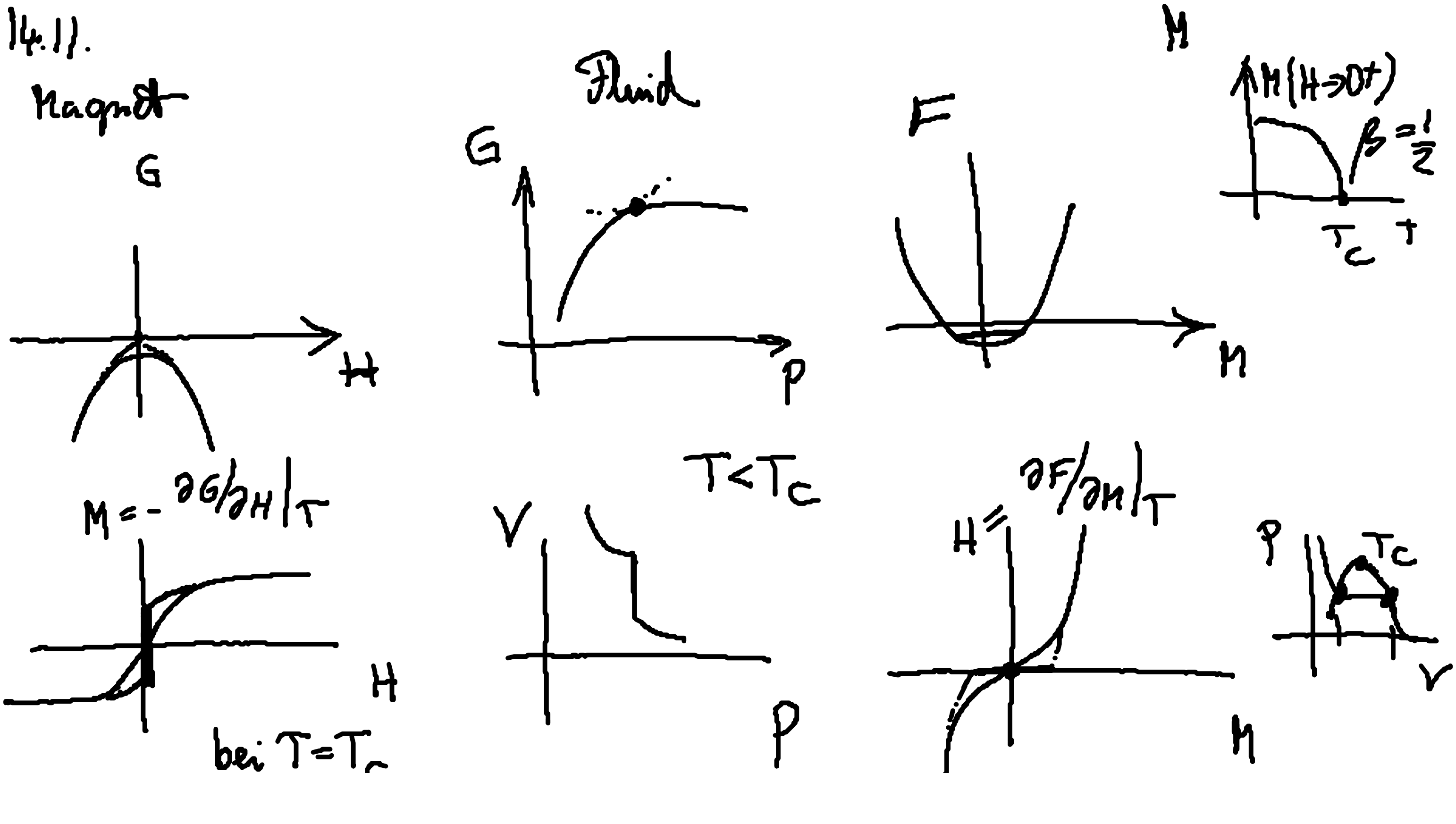
14.11.

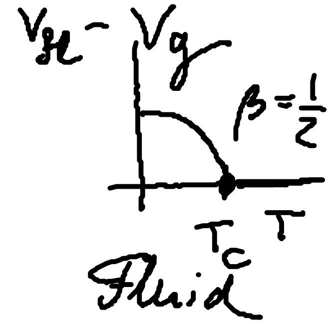
14.11.



Magnet
Fluid
M
G
G
F
M(H→0+)
β = 1/2
T_c
T
H
p
M
M = - ∂G/∂H|_T
T<T_c
H = ∂F/∂M|_T
V
p
T_c
H
V
bei T=T_c
p
M

auch unterhalb T_c

$$M(H \to 0^+) > 0 \quad \text{für } T < T_c$$
$$M(H \to 0^+) = 0 \quad \text{für } T > T_c$$



Kritische Exponenten

In Analogie zum Fluid (van-der-Waals Gas)

$$M(T, H \to 0) \propto (-\varepsilon)^{\beta} \quad T < T_c \qquad \varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$$

Exponent β für Ordnungsparameter

$$\chi_T = \left.\frac{\partial M}{\partial H}\right|_T \propto \begin{cases} \varepsilon^{-\gamma} & T > T_c \\ (-\varepsilon)^{-\gamma'} & T < T_c \end{cases}$$

isotherme Suszeptibilität

$$C_H(H=0) = \left.\frac{\partial E_{\text{th.}}}{\partial T}\right|_{T} (H=0) \propto \begin{cases} (-\varepsilon)^{-\alpha'} & T < T_c \\ \varepsilon^{-\alpha} & T > T_c \end{cases}$$

Exponenten messen oder mit bestimmten Modellen berechnen, z.B. α', β, γ'.

$$\boxed{\begin{gathered} \alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2 \\ \text{Rushbrooke-Ungleichung} \end{gathered}} \qquad \cancel{= \frac{15}{8} < 2}$$

Exponenten-Ungleichungen

- Ausgangspunkt ist $\chi_T (C_H - C_M) = T \alpha_H^2$

$$C_M = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_M ; \quad C_H = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_H ; \quad \alpha_H = \left.\frac{\partial M}{\partial T}\right|_H$$

- Argument: F ist konkav in Temperatur T (Stabilitätsargument)

$$C_M = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$ spez. Wärme bei M = const

$$dU = T\,dS + H\,dM$$
$$= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_M dT + \frac{\partial S}{\partial M}\Big|_T dM\right) + H\,dM$$

$$\Rightarrow\quad C_M = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_M = T\frac{\partial S}{\partial T}\Big|_M \,;\qquad dF = -S\,dT + H\,dM$$

$$\Rightarrow\quad C_M = -T\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial F}{\partial T} = -T\underbrace{\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}}}_{\leq 0} \;\Rightarrow\; S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$\Rightarrow\quad C_M \geq 0$$

Also
$$C_H = \frac{T\alpha_H^2}{\chi_T} + \underbrace{C_M}_{\geq 0} \geq \boxed{\frac{T\alpha_H^2}{\chi_T}}$$

Jetzt kritisches Verhalten für $T<T_c$ einsetzen:

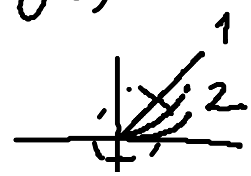
$$C_H \propto (-\varepsilon)^{-\alpha'},\quad \chi_T \propto (-\varepsilon)^{-\gamma'};\quad \alpha_H \propto (-\varepsilon)^{\beta-1}$$

$$(-\varepsilon)^{-\alpha'} \geq \text{const}\cdot(-\varepsilon)^{2(\beta-1)}(-\varepsilon)^{\gamma'}$$

$$\underset{\displaystyle x^{\varphi}}{\overset{}{g(x)}}\;\geq\;\underset{\displaystyle x^{\lambda}}{f(x)}$$

$$g(x) = x^{\varphi},\qquad f(x) = x^{\lambda}$$

Lemma: $f(x) \leq g(x)$ und $f(x) \propto x^{\lambda}$; $g(x) \propto x^{\varphi}$ für $x \to 0^+$. Dann $\lambda \geq \varphi$



$$\Rightarrow \quad \lambda = 2(\beta-1)+\gamma', \quad \varphi = -\alpha'$$

$$2(\beta-1)+\gamma' \geq -\alpha'$$

$$\boxed{\alpha' + 2\beta + \gamma' \geq 2}$$ Rushbrooke inequality

Weitere Ungleichungen ebenfalls herleitbar.

Cooper-Smith, Griffiths, Buckingham-Gunton, Fisher etc.

Grosse Systeme

Zahl der $\underset{\text{mikroskopische}}{\wedge}$ Freiheitsgrade $F \gg 1$

1) Klassische Hamiltonsche Systeme

Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(q,p)$

$F \gg 1$

$q = q_1, \dots, q_F$

$p = p_1, \dots, p_F$

Die q_i's sind verallgemeinerte Ko.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$ Hamiltonsche Gleichungen

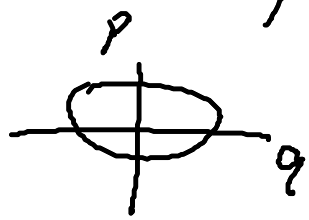
Der 2F-dimensionale Phasenraum der q_i, p_i

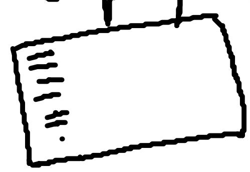
heißt Γ-Raum.

Def: (Anfangswertaufgabe): Gegeben (q,p) zur Zeit $t = t_0$. Bestimme (q,p) für $t \neq t_0$.

PROBLEM: 1) Fast immer nicht (praktisch) lösbar.
2) Anfangszustand (q,p) kann praktisch gar nicht präpariert werden.

HO





Quantenmechanik

System mit $F + F_S \gg 1$ Freiheitsgraden

$$\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_F$$
$$\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_F$$

Def: Anfangswertaufgabe: Gegeben $|\psi(t_0)\rangle$, bestimme $|\psi(t)\rangle$ gemäß $i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$

$\hbar = 1$

Def: Spektralaufgabe: Löse das Eigenwertproblem

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Problem 1+2 wie in Klassik unlösbar.

Spektralaufgabe Abschätzung $F_S = 0$

Lösung im Hilbertraum $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_F$

– Schon für $F=1$ nicht lösbar wegen $\dim \mathcal{H}_1 = d$ sehr groß

z.B. $d = 10$, $F = 10^{20}$

$\Rightarrow$ Matrix der Dimension $d_F = \underbrace{d \cdots d}_{10^{20}} = d^F$

$$= 10^{10^{20}}$$

Riesige Zahlen; „Turm-Zahlen"

Üblicherweise $N = 10^{20}$ ist groß!

Die Zahl $N = 10^{10^{10^{10}}}$ sehr viel größer.

z.B. $10^{20} = 10^{10} \cdot 10^{10}$ aber

$$10^{10^{20}} = 10^{10^{10} \cdot 10^{10}} = \left(10^{10^{10}}\right)^{10^{10}}$$

„Power-Towers"

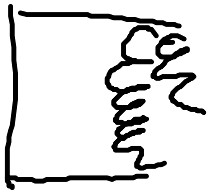
Def: $a \Uparrow k = \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{}$ k-fach, $k = 1, 2, \dots$

$$a \Uparrow 1 = a$$

Interessant ist z.B. $z \uparrow\uparrow k$; $e^z \uparrow\uparrow k$

$e^{ze^{ze^{ze^{z}}}}$ $\qquad$ $(e^z)^{e^{z^{e^{z^{\cdot^{\cdot}}}}}}$

Unendliche Power-Towers, $h(z) \equiv z \uparrow\uparrow \infty$

$z^{z^{z}}$  $= z^{z^{z^{\cdot^{\cdot}}}}$

Esh mit Statistik:

Klassik: $F = 10 \uparrow\uparrow 2$ Freiheitsgrade

DGL System der Größe $2F$,

Lösen bis zur Zeit T,

Aufwand $\propto 2 \cdot T \cdot F = 2T\, 10 \uparrow\uparrow 2$

QM: Spektralproblem mit $F = 10 \uparrow\uparrow 2$

$d = 10$ (Hilbertraumdimension)

$d^F = 10 \uparrow\uparrow 3$

Frage: Gibt es höhere $k = 4, 5, 6, \ldots$

Fazit: Spektralaufgabe ist praktisch nie lösbar

Auswege: a) Maschine, z.B. Q Computer (fraglich)

b) stat. Methode