Heute 16h c.t. Raum PN 202

Physikalisches Kolloquium

Prof. Michael Lehmann

Elektronenholographie – ein geschärfter "Blick in den Nanokosmos"

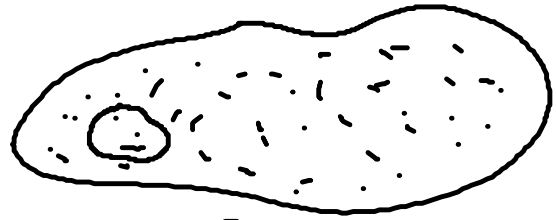
Alle sind eingeladen,
Teilnahme wird empfohlen!

16.11.2006

1. Ansatzpunkt: vollst. mikrosk. Information über
   // ein System ist nicht verfügbar

wir wollen uns deshalb mit weniger zufriedengeben.

$\Rightarrow$ Nur wenige (makroskopische) Observablen Λ



v Teilvolumen

$-A = N_v$ = Teilchenzahl in v zu Zeit t

Gesamtvolumen V, Gesamtteilchenzahl N, Energie E

Wir führen die Teilchenzahldichte

$$\rho(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N} \delta^{(d)}(\underline{x}-\underline{x}_i)$$

Ortskoo. des i-ten Teilchen

d : Dimension

- klassisch: $N_v(t) = \int_v d^d x \sum_{i=1}^{N} \delta^{(d)}(\underline{x}-\underline{x}_i(t))$

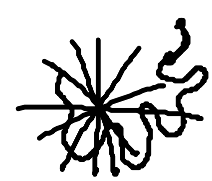
  $\underline{x}_i(t)$ aus Hamilton-Gleichungen

- quantenmech.: $N_v(t) = \langle \Psi(t) | \int_v d^d x \, \rho(x) \, | \Psi(t) \rangle$

  aus der Sgl.

Beobachtung: Die makrosk. Observablen $A(t)$ fluktuieren mit der Zeit t. Fluktuationen sind klein, falls $N \gg 1$. $N = 10^{20}$

System durchläuft im Γ-Raum viele mikr. Zustände



sehr viele mikroskopische Zustände werden „angelaufen", sie führen zum selben Makrozustände.

Grundannahmen der Statistik

- zeitliche Mittelwerte makroskopischer Observablen A

$$\bar{A}(T,t) \equiv \frac{1}{T}\int_t^{t+T} dt'\, A(t') = \bar{A}$$

sind konstant für hinreichend großes T und unabh. von t

- (Hauptannahme der Statistik)
  Ersetze die mikrosk. Dynamik
  [Kurve $t \mapsto (q,p)$ im Γ-Raum
  " $t \mapsto |\Psi(t)\rangle$ im Hilbertraum] durch

  a) eine zeitunabhängige W-verteilung $f(q,p)$ im Γ-Raum (Klassik)

  b) eine zeitunabh. W-verteilung p_n für die Eigenvektoren $|\Psi_n\rangle$ und Eigenwerte E_n von $\hat{H}|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle$

Annahme: Dann gilt

$$\bar{A} = \int dq\,dp\, A(q,p) f(q,p) \text{, klassisch}$$

$$\bar{A} = \sum_n p_n \langle\Psi_n|A|\Psi_n\rangle,$$

d.h. sämtl. techn. Mittelwerte werden mittels W-verteilungen berechnet.

$\Rightarrow$ Führt zur Ensembletheorie

Zufallsgrößen

BRONSTEIN

diskrete Zufallsgröße X kann Werte $x_1, \dots, x_d$ annehmen mit W

$$p_n = P(X = x_n), \quad \{p_n\} \text{ W-verteilungen}$$

Es gilt
$$\sum_{n=1}^{d} p_n = 1 \quad \text{Normierung}$$

kontinuierliche Zufallsgrößen X mit Werten zwischen $-\infty$ und ∞, nimmt Wert im Intervall $[a, b]$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b dx\, p(x); \quad p(x) \text{ heißt W-Dichte}$$

Es gilt
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, p(x) = 1 \quad \text{Normierung}$$

Def: Der Mittelwert (Erwartungswert) einer Funktion $f(X)$ einer Zufallsgröße X ist

$$\langle f(X) \rangle \equiv \sum_{n=1}^{d} p_n f(x_n), \quad \text{diskret}$$

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, p(x) f(x), \quad \text{kont.}$$

Diskrete ZV als Spezialfall der kont.:

$$\langle f(x)\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underbrace{p(x)}\, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underbrace{\sum_{n=1}^{d} p_n\, \delta(x-x_n)}\, f(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{d} p_n\, f(x_n)$$

⌈ Bemerkung: Für jede „vernünftige" W Dichte $p(x)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\, p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$$

FORSTER Analysis III
⌊

Mehrdim. Z-größen sind Zufallsvektoren

$\underline{X} = (X_1, \ldots, X_N)$ mit N Zufallsvariablen

und

$$p_n = P(\underline{X} = \underline{X}_n) \quad \text{diskret}$$

$$P(a_1 \leq x_1 \leq b_1, \ldots, a_N \leq x_N \leq b_N) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N\, p(x_1, \ldots, x_N)$$

Dichte (kontinuierl.)

Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$ heißen <u>unabhängig</u>, falls

$$p(x_1, \dots, x_N) = p^{(1)}(x_1) \cdot p^{(2)}(x_2) \cdot \dots \cdot p^{(N)}(x_N)$$

$$p_n = P(\underline{X} = \underline{x}_n) = P(X_1 = x_{1,n}) \cdot P(X_2 = x_{2,n}) \cdot \dots \cdot P(X_N = x_{N,n})$$

$$= p_n^{(1)} p_n^{(2)} \cdot \dots \cdot p_n^{(N)}$$ diskrete

Radikale Abkehr von Mikroskopik:

Die Shannon-Information einer Verteilung p_α

1) „Ziehung der Energien"

Ziehen von N Energien mit Ergebnis $e_1, e_2, \dots e_N$

Die k-te Ziehung (e_k) hat den Wert

E_α mit der W. p_α, $\alpha = 1, \dots, d$

(unabhängig von k).

Für fortgesetztes Ziehen (N sehr groß)

werden mit großer W $p_1 N$ Ziehungen den Wert E_1

haben, ... $p_d N$ Ziehungen den Wert E_d.

Für große N ist die Wahrscheinlichkeit

für eine typische Ziehfolge

$$p(e_1, e_2 \dots e_N) \xrightarrow[N \to \infty]{} p_1^{p_1 N} \cdot p_2^{p_2 N} \cdot \dots \cdot p_d^{p_d N}$$

Codierungstheorie (2. Weltkrieg)

Betrachte „Nachricht“ aus Buchstaben $e_1, \ldots, e_N$.
Jeder Buchstabe e_k hat Wert E_α mit W p_α.
Für lange Nachrichten (N groß) werden mit großer Wahrscheinlichkeit $p_1 N$ Buchstaben den Wert E_1 haben. Solche Nachrichten heißen <u>typisch</u>.
Die W. für eine typ. Nachricht

$$p(e_1, e_2, \ldots e_N) \Rightarrow p_1^{p_1 N} \cdots p_\alpha^{p_\alpha N} \qquad N \to \infty$$

$$=$$

<u>Beispiel</u>: $\alpha = 2$, $p_1 \equiv p$, $p_2 = 1-p$

$$p(e_1 \ldots e_N) \longrightarrow p^{pN}(1-p)^{(1-p)N}$$

$$\equiv e^{N \mathcal{J}[p]}, \text{ wobei}$$

$$\mathcal{J}[p] = p \ln p + (1-p) \ln (1-p)$$

<u>Def.</u>: Die Shannon-Information einer W-Verteilung ist $\mathcal{J}[\{p_\alpha\}] \equiv \sum_\alpha p_\alpha \ln p_\alpha$

- $I[p_\alpha] \leq 0$
- $p_\alpha = \delta_{\alpha,\alpha_0} \Longrightarrow I[p_\alpha] = 0$ ist maximal für scharfe Verteilung

Für $d = 2$ (Bits) häufig

$$J_2[p] \equiv p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)$$

$$p(e_1, \ldots, e_N) \longrightarrow p^{pN} (1-p)^{(1-p)N} \equiv 2^{N J_2[p]}$$