

Heute 16h c.t. Raum PN 202

Physikalisches Kolloquium

Prof. Michael Lehmann

Elektronenholographie - ein geschärfter
"Blick in den Nanokosmos"

Alle sind eingeladen,
Teilnahme wird empfohlen!

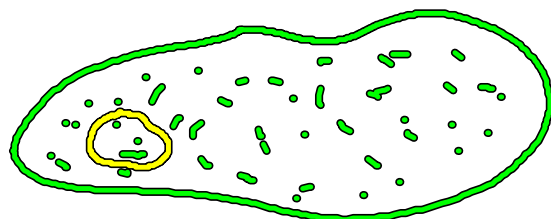
16.11.2006

1. Ansatzpunkt: vollst. mikrosk. Information über

= ein System ist nicht verfügbar

Wir wollen uns deshalb mit weniger zufriedengeben.

⇒ Nur wenige (makroskopische) Observablen \wedge



∨ Teilvolumen

- $A = N_V =$ Teilchenzahl
in V zur Zeit t

gesamtvolumen V , gesamtteilchenzahl N , Energie E

Wir führen die Teilchendichtefunktion

$$\rho(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \delta^{(d)}(\underline{x} - \underline{x}_i)$$

Ortskoor. des
 i -ten Teilchen
d: Dimension

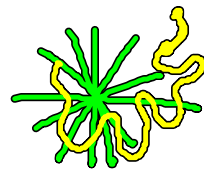
• klassisch: $N_V(t) = \int_V d^d x \sum_{i=1}^N \delta^{(d)}(\underline{x} - \underline{x}_i(t))$
 $\underline{x}_i(t)$ aus Hamilton-Gleichungen

• quantenmeth.: $N_V(t) = \langle \Psi(t) | \int_V d^d x \rho(x) | \Psi(t) \rangle$

aus der Sgl.

Beobachtung: Die makro. Observables $A(t)$
fluktuiert mit der Zeit t . Fluktuationen sind
klein, falls $N \gg 1$. $N=10^{20}$

System durchläuft im Γ -Raum viele miker.
Zustände



sehr viele mikroskopische Zustände
werden „angelaufen“, sie führen zum selben Makrozustand.

Grundannahmen der Statistik

- zeitliche Mittelwerte makroskopischer Observablen A

$$\bar{A}(T, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' A(t') = \bar{A}$$

sind konstant für hinreichend großes T und unabh. von t

- (Hauptannahme der Statistik)

Ersetze die mikrosk. Dynamik

[Kurve $t \mapsto (q, p)$ im Γ -Raum

" $t \mapsto |\Psi(t)\rangle$ im Hilbertraum] durch

a) eine zeitunabhängige W -Verteilung $f(q, p)$ im Γ -Raum (Klassik)

b) eine zeitunabh. W -Verteilung p_n für die Eigenvektoren $|\Psi_n\rangle$ und Eigenwerte E_n von $\hat{H}|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle$

Annahme: Dann gilt

$$\bar{A} = \int dq dp A(q, p) f(q, p), \text{ klassisch}$$

$$\bar{A} = \sum_n p_n \langle \Psi_n | A | \Psi_n \rangle,$$

dh. sämtl. zähl. Mittelwerte werden mittels

W-Verteilungen berechnet.

⇒ Führt zur Ensembletheorie

Zufallsgrößen

BRONSTEIN

diskrete Zufallsgröße X kann Werte x_1, \dots, x_d annehmen mit W

Es gilt $p_n = P(X=x_n)$, $\{p_n\}$ W-Verteilungen

$$\sum_{n=1}^d p_n = 1 \quad \text{Normierung}$$

kontinuierliche Zufallsgrößen X mit Werten zwischen $-\infty$ und ∞ , nimmt Werte im Intervall $[a, b]$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b dx p(x); \quad p(x) \text{ heißt W-Dichte}$$

$$\text{Es gilt } \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1 \quad \text{Normierung}$$

Def: Der Mittelwert (Erwartungswert) einer Funktion $f(x)$ einer Zufallsgröße X ist

$$\langle f(x) \rangle \equiv \sum_{n=1}^d p_n f(x_n), \quad \text{diskret}$$

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) f(x), \quad \text{kont.}$$

Diskrete ZV als Spezialfall der kont.:

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{p(x)} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \underbrace{\sum_{n=1}^d p_n \delta(x-x_n)} f(x) \\ = \sum_{n=1}^d p_n f(x_n)$$

⌈ Bemerkung: Für jede „vernünftige“ Dichte $p(x)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$$

FORSTER Analysis III

⌋

Mehrdim. Z-größen sind Zufallsvektoren

$$\underline{X} = (X_1, \dots, X_N) \text{ mit } N \text{ Zufallsvariablen}$$

und

$$p_{\underline{N}} = P(\underline{X} = \underline{x}_n) \quad \text{diskret}$$

$$P(a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_N \leq x_N \leq b_N) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \dots \int_{a_N}^{b_N} dx_N P(x_1, \dots, x_N) \\ \text{Dichte (kontinuierl.)}$$

Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N heißen unabhängig, falls

$$P(X_1, \dots, X_N) = P^{(1)}(x_1) \cdot P^{(2)}(x_2) \cdot \dots \cdot P^{(N)}(x_N)$$

$$P_n = P(\underline{X} = \underline{x}_n) = P(X_1 = x_{1,n}) \cdot P(X_2 = x_{2,n}) \cdot \dots \cdot P(X_N = x_{N,n}) \\ = P_n^{(1)} \cdot P_n^{(2)} \cdot \dots \cdot P_n^{(N)} \quad \text{direkt}$$

Radikale Abkehr von Mikrostatik:

Die Shannon-Information einer Verteilung P_d

1) Ziehung der Energien

Ziehen von N Energien mit Ergebnis e_1, e_2, \dots, e_N

Die k -te Ziehung (e_k) hat den Wert

E_d mit der W. P_d , $d = 1, \dots, d$

(unabhängig von k).

Für festgesetztes Ziehen (N oder groß)

weder mit großer W. P_1^N Ziehungen der Werte E_1
haben, ... P_d^N Ziehungen der Wert E_d .

Für große N ist die Wahrscheinlichkeit
für eine typische Ziehfolge

$$P(e_1, e_2, \dots, e_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P_1^{P_1^N} \cdot P_2^{P_2^N} \cdot \dots \cdot P_d^{P_d^N}$$

Codierungstheorie (2. Weltkrieg)

Betrachte "Nachricht" aus Buchstaben e_1, \dots, e_N .

Jeder Buchstabe e_k hat Wert E_k mit $\sum p_k = 1$.

Für lange Nachrichten (N groß) werden mit großer Wahrscheinlichkeit $\prod_{k=1}^N p_k$ Buchstaben der Wert E_k haben. Solche Nachrichten heißen typisch.

Die W. für eine typ. Nachricht

$$p(e_1, e_2, \dots, e_N) \rightarrow p_1^N \dots p_N^N \quad N \rightarrow \infty$$
$$=$$

Beispiel: $d=2$, $p_1 = p$, $p_2 = 1-p$

$$p(e_1 \dots e_N) \rightarrow p^N (1-p)^{(1-p)^N}$$
$$= e^{-N \mathcal{J}[p]}, \text{ wobei}$$

$$\mathcal{J}[p] = p \ln p + (1-p) \ln (1-p)$$

Def: Die Shannon-Information einer W-Verteilung ist $\mathcal{J}[\{p_k\}] = \sum_k p_k \ln p_k$

- $J[p_2] \leq 0$

- $p_d = \delta_{d,d_0} \Rightarrow J[p_2] = 0$ ist maximal für scharfe Verteilung

Für $d=2$ (Bits) häufig

$$J_2[p] = p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)$$

$$p(e_1, \dots, e_N) \rightarrow p^N (1-p)^{N-N} = 2^{NJ_2[p]}$$