Diesen Donnerstag beginnt die Vorlesung bereits um 8^{15} h !

5.12.2006

$$N = \frac{\sum_\alpha N_\alpha \, e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)}}{Z_{gk}} =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\sum_\alpha \delta_{N_\alpha, n} \, e^{-\beta(E_\alpha - \mu n)} \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_\alpha \delta_{n, N_\alpha} \, e^{-\beta(E_\alpha - \mu n)}}$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \, e^{\beta\mu n} Z(\beta, n)}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta\mu n} Z(\beta, n)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n$$

$$p_n = \frac{e^{\beta\mu n} Z(\beta, n)}{Z_{gk}}$$ W-Verteilung für Teilchenzahl

__Def:__ Kumulanten-erzeugende Funktion

$$e^{-f_{gk}(\chi)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n e^{i\chi n} =$$

$$= \frac{\sum_n e^{\beta\mu n + i\chi n} Z(\beta, n)}{Z_{gk}}$$

$$= \frac{Z_{gk}(\mu + i\chi/\beta)}{Z_{gk}(\mu)}$$

$-pV$

$\|$

$\Omega = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{gk}$

$$= e^{-\beta[\Omega(\mu + i\chi/\beta) - \Omega(\mu)]}$$

in Analogie zum kanonischen Fall

Mikrokanonik : $\Omega(E,N)$, $S = k_B \ln \Omega$

Kanonik : $Z(\beta, N) = \sum \Omega e^{-\beta E}$ $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$

Großkanonik : $Z_{gk}(\mu) = \sum_N e^{\beta\mu N} Z(\beta, N)$

$\Omega_{gk} = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{gk}$

Jetzt $\quad f(x,N) = +ix\underline{\frac{\partial}{\partial\mu}\Omega} - \frac{1}{2!}x^2\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\Omega + \dots$

$\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = -N$

N: mittl. Teilchenzahl $\quad = -ixN$

$d\Omega = dF - d(\mu N)$

$\Omega = \underbrace{U-TS}_{F} - \mu N$

$= -SdT - pdV + \cancel{\mu dN}$
$\cancel{-\mu dN} - Nd\mu$

Alternativ:
$$N = \frac{\sum_\alpha N_\alpha e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)}}{Z_{gk}}$$

$$\Omega = -\frac{1}{\beta}\ln Z_{gk} \longrightarrow \underline{\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}} = -\frac{1}{\beta}\frac{\frac{\partial}{\partial\mu}Z_{gk}}{Z_{gk}}$$
$$= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial/\partial\mu\sum_\alpha e^{-\beta(E_\alpha-\mu N_\alpha)}}{Z_{gk}} =$$
$$= -\frac{\sum_\alpha N_\alpha e^{-\beta(E_\alpha-\mu N_\alpha)}}{Z_{gk}} = -\underline{N}$$

Wir benötigen auch noch
$$\frac{\partial}{\partial\mu}N = \frac{\kappa_T N^2}{V}$$

(Aufgabe)

κ_T isotherme Kompressibilität.

$\Rightarrow$ Kumulanten $\quad K_1 = N$

$$K_2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 =$$
$$= \langle (\Delta n)^2 \rangle = \frac{k_B T \kappa_T N^2}{V}$$
$$= k_B T \kappa_T \underbrace{\left(\frac{N}{V}\right)}_{\text{Dichte}} \cdot N$$

Alle Kumulanten sind $\propto$ zum Volumen bzw. (bei konstanter Dichte) zur Teilchenzahl N

$$\Omega = -\underbrace{p}_{\text{intensiv}} V$$

<u>Beispiel</u>: van-der Waals Gas

$$\left(p + a\frac{N^2}{V^2}\right)\left(V - Nb\right) = N k_B T$$

$$N \propto V$$

Es gilt wieder $\quad \dfrac{\sqrt{K_2}}{K_1} \propto \dfrac{1}{\sqrt{V}} \propto \dfrac{1}{\sqrt{N}}$

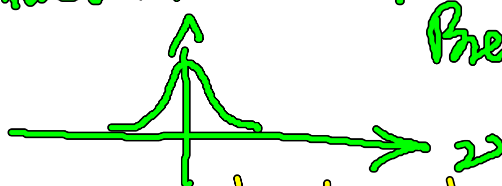
$$\xrightarrow{N \to \infty} 0$$

Wie vorher jetzt wieder scharfe Verteilung auf der Skala N

skalierte Teilchenzahl

$$\nu \equiv \frac{n - \kappa_1}{\sqrt{\kappa_2}} = \frac{n - N}{\sqrt{k_B T \kappa_T N^2 / V}}$$

wird für $N \to \infty$ asymptotisch normalverteilt (Mittelwert Null, Breite Eins)



Einführung in die Quantenstatistik

Teilchen (Masse m, Spin S, Ladung q)

N-Teilchensysteme

$$\mathcal{H}_N \equiv \mathcal{H}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{(1)}$$

N-Teilchen Hilbertraums

1-Teilchen

Hilbertraum

Dadurch: entscheidender Bruch mit der klass. Physik, eine der größten Errungenschaften der Physik des 20. Jhdt. $\longrightarrow$ Verschränkung

Jetzt ununterscheidbare Teilchen: identische Fundamentaleigenschaften führt zu Symmetrieeigenschaften der entsprechenden Wellenfunktion.

z.B. $N=2$ Teilchen $\qquad \xi_i = (x_i, \sigma_i)$ ← Ort, ← Spin

Transpositionsoperator $\qquad \hat{\Pi}_{12}\Psi(\xi_1,\xi_2) = \Psi(\xi_2,\xi_1)$

Es zeigt sich, daß es zwei Möglichkeiten gibt:

$$\hat{\Pi}_{12}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$$ symmetrischer Zustand: bosonisch

$$\hat{\Pi}_{12}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle$$ anti-symmetrisch, fermionisch

Entsprechend für N ununterscheidbare Teilchen:
entweder symmetrisch (Bosonen)
antisymmetrisch (Fermionen)

bei Vertauschung $\xi_i \longleftrightarrow \xi_j$), $i \neq j$

Bosonen: ganzzahliger Spin

Fermionen: halbzahliger Spin (Pauli 1925 dann QFT 1940)

Jetzt (Anti) Symmetrisierungsoperator

$$\hat{S} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{p \in S_N} \hat{\Pi}_p$$

S_N symm. Gruppe (Vertauschungen von N Objekten)

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{p \in S_N} \underbrace{\mathrm{sgn}(p)}_{(-1)^{n(p)}} \hat{\Pi}_p$$

$n(p)$ = Anzahl der Transpositionen für p

Bosonen: Ausgehen von 1-Teilchenbasis $|\nu\rangle$

$$|\nu_1 \ldots \nu_1, \nu_2 \ldots \nu_2, \ldots \nu_r \, \nu_r\rangle_S$$

$$\Leftrightarrow \langle \xi_1 \ldots \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_2, \ldots \xi_r \ldots \xi_r | \nu_1 \ldots \nu_1, \nu_2 \ldots \nu_2, \ldots \nu_r\rangle_S$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}\sqrt{N_1!}\sqrt{N_2!} \cdots \sqrt{N_r!}} \sum_p \hat{\Pi}_p \, \psi_{\nu_1}(\xi_1) \ldots \psi_{\nu_1}(\xi_{N_1}) \ldots$$

$$\ldots \psi_{\nu_2}(\xi_{N_1+1}) \cdots \psi_{\nu_r}(\xi_{N-N_r+1}) \cdots \psi_{\nu_r}(\xi_N)$$

N_1 Teilchen im Zustand ν_1

N_2 " " ν_2

$\vdots$

N_r 〃 〃 ν_r

Für Fermionen sind es Slater-Determinanten

$$|\nu_1 \dots \nu_N\rangle_A = \hat{A}\,|\nu_1 \dots \nu_N\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P \hat{\Pi}_P \,\mathrm{sgn}(P)\, |\nu_1 \dots \nu_N\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \xi_1 \dots \xi_N | \nu_1 \dots \nu_N \rangle_A \equiv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_{\nu_1}(\xi_1) & \psi_{\nu_1}(\xi_2) & \dots & \psi_{\nu_1}(\xi_N) \\ \psi_{\nu_2}(\xi_1) & \psi_{\nu_2}(\xi_2) & \dots & \psi_{\nu_2}(\xi_N) \\ & & & \\ \psi_{\nu_N}(\xi_1) & \dots & & \psi_{\nu_N}(\xi_N) \end{vmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Pauli-Prinzip: Zwei oder mehr Fermionen können sich nicht im selben Quantenzustand befinden.

Das Ideale Fermi-Gas

Großkanonische Zustandssumme

Annahme: 1-Teilchenzustände mit Quantenzahlen

$l = 1, \dots, D$.

1-Teilchenenergien ε_l

Mehr-Teilchenzustände $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_D)$

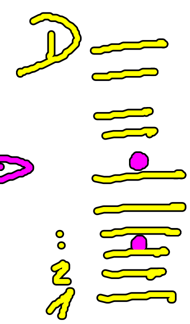
mit n_l Teilchen im 1-Teilchenzustand l

$n_l = 0$ oder 1 (Pauli-Prinzip)

$$\left\| \; E_\alpha = \sum_{l=1}^{D} n_l \varepsilon_l , \quad N_\alpha = \sum_{l=1}^{D} n_l \; \right\|$$

z.B. Atom mit D Niveaus

$\alpha = (0010010 \,..\, 0) \longleftrightarrow$



$$Z_{gk} = \sum_{\alpha} e^{-\beta (E_\alpha - \mu N_\alpha)} =$$

$$= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_D = 0}^{1} e^{-\beta \sum_{l=1}^{D} (n_l \varepsilon_l - \mu n_l)}$$

alle Konfiguration

e-Funktion faktorisiert

$$= \sum e^{-\beta (n_1 \varepsilon_1 - \mu n_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-\beta (n_D \varepsilon_D - \mu n_D)}$$

$$= \sum_{n_1}^{n_1 \dots n_D} e^{-\beta n_1(\varepsilon_1-\mu)} \sum_{n_2} e^{-\beta n_2(\varepsilon_2-\mu)} \dots \sum_{n_D=0}^{1} e^{\dots}$$

$$= \left[1+e^{-\beta(\varepsilon_1-\mu)}\right] \cdot \dots \cdot \left[1+e^{-\beta(\varepsilon_D-\mu)}\right]$$

$$= \prod_{l=1}^{D} \left(1+e^{-\beta(\varepsilon_l-\mu)}\right)$$

$$\left\| \; \frac{pV}{k_B T} = \ln Z_{gk} = \sum_{l=1}^{D} \ln\left(1+e^{-\beta(\varepsilon_l-\mu)}\right) \right\|$$