

21.12.06

21.12.06

$$U = U_0 + \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} d\varepsilon \nu_{\text{osc}}(\varepsilon) \frac{\beta \varepsilon}{e^{\beta \varepsilon} - 1}$$

hohe Temperaturen, $\beta \rightarrow 0$ $\beta = \frac{1}{k_B T}$

Wir brauchen

$$\frac{x e^{zx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{n!} x^n, \quad B_n \text{ Bernoulli-Zahl}$$
$$= B_n(z=0)$$

$$\Rightarrow U = U_0 + \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \underbrace{\int_0^{\infty} d\varepsilon \nu_{osc}(\varepsilon) \varepsilon^n}_{\equiv \langle \nu_{osc} \rangle_n} \beta^n$$

$$\| U = U_0 + (k_B T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \langle \nu_{osc} \rangle_n (k_B T)^{-n} \|$$

Für große T :

$$U = k_B T \underbrace{\frac{B_0}{0!}}_1 \langle \nu_{osc} \rangle_0 + O(T^0)$$

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \dots$$

$$= k_B T \int_0^{\infty} d\varepsilon \nu_{osc}(\varepsilon) + O(1)$$

$$= k_B T \int_0^{\infty} d\varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \delta(\varepsilon - \hbar \omega_l) + O(1)$$

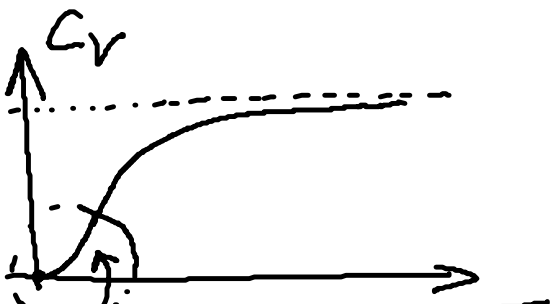
$$= F \times k_B T + O(T^0)$$

↑ Anzahl der Freiheitsgrade

|| " gleichverteilungssatz " ||

nur für große Temperaturen

Damit $C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = F \times k_B + O\left(\frac{1}{T^2}\right)$
 spez. Wärme.



$\propto T^3$ in $d=3$, Debye $\omega \ll k$

Photonen

moderne Physik: bosonische Teilchen, die automatisch aus der Quantisierung des Eichfeldes. Das Eichfeld erscheint aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz in der relativistisch konsistenten Beschreibung geladener Teilchen (Dirac-Gleichung).

Photonen Masse $m=0$ $S=1$
 $\omega_k = c|k|$ zwei Polarisations-
 richtungen

→ Einteilchenzustandsdichte

$$\rho_1(\varepsilon) = 2 \sum_{\underline{k}} \delta(\varepsilon - \hbar \omega_k)$$

$$= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \delta(\varepsilon - \hbar c|k|)$$

$$= \frac{V}{\pi^2} \frac{1}{(\hbar c)^3} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \quad d=3$$

Vakuum

Photonen im therm. Gg

Kanonisches Ensemble

$$U = \int_0^\infty d\varepsilon \rho_1(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{\sum_{\text{min}} e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

$$= \frac{c}{\pi^2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/kT} - 1} \propto T^4, \quad x = \varepsilon/kT$$

$$= \frac{V}{(\hbar c)^3 \pi^2} (kT)^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{V}{(hc)^3 \pi^2} (k_B T)^4 \Gamma(4) \zeta(4)$$

$\uparrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Spektrale Energiedichte $u(\omega, T)$

$$U = V \int_0^{\infty} d\omega u(\omega, T)$$

$$\| u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{c^3 \pi^2} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \|$$

Wiensche Strahlungsgesetz $\hbar \omega \gg k_B T$

Rayleigh-Jeans $\hbar \omega \ll k_B T$

hohe Temp. (klassische Limit) $u \propto k_B T \omega^2$

Präzisionsexperimente an der PTR.

Zshg.: Druck / Energiedichte

$$pV = - \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} dE \mathcal{Z}_1(E) \ln(1 - e^{-\beta E}) \quad \begin{matrix} \text{part.} \\ \text{Zshg.} \end{matrix}$$

ableiten

$$= + \frac{\beta}{\beta} \int_0^{\infty} dE \left(\int_0^E dE' \mathcal{Z}_1(E') \right) n_B(E)$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} dE E \mathcal{Z}_1(E) n_B(E) = \frac{1}{3} U$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3} \frac{U}{V}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1(E) &= c_1 E^2 \\ \int_0^E \mathcal{Z}_1(E') &= \frac{1}{3} \mathcal{Z}_1(E) E \end{aligned}$$

VII 9) Der statistische Operator

$$\bar{A} = \langle A \rangle = \sum_n p_n \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle$$

↑ Min. der Shannon-Inf. (Dm.)

Definition: Über ein QM System im H-Raum \mathcal{H}

mit VOS $\{|n\rangle\}$ liege nur unzureichende Information vor. Mit Wahrscheinlichkeit p_n befinde sich das System im Zustand $|n\rangle$.

Die Menge $(p_n, |n\rangle)$ heißt Ensemble

von reinen Zustände $|n\rangle$.

Dann ist der Erwartungswert einer Observable A gegeben durch

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \langle n | A | n \rangle,$$

$$0 \leq p_n \leq 1.$$

Definition: Der Dichtoperator

(Dichtematrix) $\hat{\rho}$ eines Ensembles $(p_n, |n\rangle)$

2-d: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ist

$$\hat{\rho} \equiv \sum_n p_n |n\rangle \langle n|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt



$\begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix}$

$$\langle A \rangle \equiv \sum_m p_m \langle m | A | m \rangle =$$

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$$

$$= \sum_{m,n} p_m \underbrace{\langle m | n \rangle}_{\delta_{nm}} \langle n | A | m \rangle$$

$$= \sum_m \langle m | \left(\sum_n p_n |n\rangle \langle n| \right) A | m \rangle$$

$$= \sum_m \langle m | \rho A | m \rangle \stackrel{\rho}{=} \underline{\underline{\text{Tr}(\rho A)}} \quad \triangle !$$

Tr : trace (Spur)

Zwei VOS $\{|n\rangle\}$, $\{|d\rangle\}$: $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$

$$\sum_d |d\rangle \langle d| = 1$$

$$\Rightarrow \text{Tr} X = \sum_n \langle n | X | n \rangle =$$

$$= \sum_{n,d} \langle n | d \rangle \langle d | X | n \rangle \quad \text{Einschieben der 1}$$

$$= \sum_{n,d} \underbrace{\langle d | X | n \rangle \langle n | d \rangle}_1 = \sum_d \langle d | X | d \rangle$$

- Die Spur ist basis unabhängig.
- $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$ Aufgabe
- $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \dots$ zyklisch

Eigenschaften des Dichteoperators

1) Normierung: Für Dichteoperatoren ρ gilt

$$\text{Tr} \rho = \sum_{nm} p_n \underbrace{\langle m|n \rangle}_{\delta_{nm}} \langle n|m \rangle = 1$$

2) Hermitizität:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \rho | \beta \rangle &= \sum_n p_n \langle \alpha | n \rangle \langle n | \beta \rangle = \\ &= \sum_n p_n \langle n | \alpha \rangle^* \langle \beta | n \rangle^* = \left(\sum_n p_n \langle \beta | n \rangle \langle n | \alpha \rangle \right)^* \\ &= \langle \beta | \rho | \alpha \rangle^* \Rightarrow \rho = \rho^\dagger \text{ "dagger"} \end{aligned}$$

3) Positivität: Es gilt für beliebige $|\psi\rangle$

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$$

$$\langle \psi | \rho | \psi \rangle = \sum_n \underbrace{p_n}_{\geq 0} \underbrace{\langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle}_{|\langle \psi | n \rangle|^2} \geq 0$$

$$\rho \geq 0.$$