21.12.06

21.12.06

$$U = U_0 + \cancel{\frac{1}{\beta}} \int_0^\infty d\varepsilon \, \nu_{osc}(\varepsilon) \frac{\cancel{\beta}\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

hohe Temperaturen, $\beta \to 0$ $\qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$

Wir brauchen

$$\frac{x e^{zx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z) \frac{x^n}{n!}, \quad B_n \text{ Bernoulli-Zahl} = B_n(z=0)$$

$$\Rightarrow \quad U = U_0 + \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \underbrace{\int_0^{\infty} d\varepsilon\, \nu_{osc}(\varepsilon)\, \varepsilon^n}_{\equiv \langle \nu_{osc} \rangle_n} \beta^n$$

$$\boxed{U = U_0 + (k_B T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \langle \nu_{osc} \rangle_n (k_B T)^{-n}}$$

Für große T:

$$U = k_B T \frac{B_0}{\underbrace{0!}_{1}} \langle \nu_{osc} \rangle_0 + O(T^0)$$

$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$

$B_2 = \frac{1}{6}$ ...

$$= k_B T \int_0^{\infty} d\varepsilon\, \nu_{osc}(\varepsilon) + O(1)$$

$$= k_B T \int_0^{\infty} d\varepsilon \sum_{l=1}^{F} \delta(\varepsilon - \hbar\omega_l) + O(1)$$

$= f \times k_B T + O(T^0)$

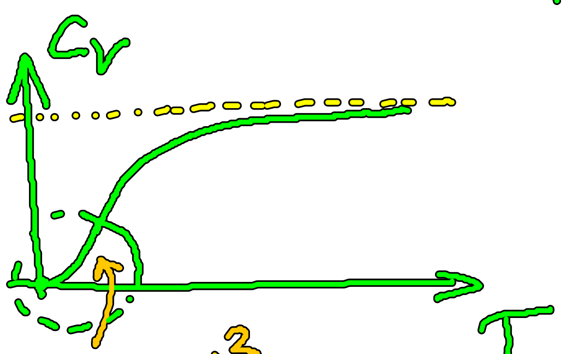
$\uparrow$ Anzahl der Freiheitsgrade

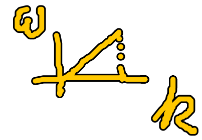
|| „Gleichverteilungssatz" ||

nur für große Temperaturen

Damit $C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = f \times k_B + O\left(\frac{1}{T^2}\right)$

spez. Wärme.



$\propto T^3$ in $d=3$, Debye 

Photonen

moderne Physik: bosonische Teilchen, die automatisch aus der Quantisierung des Eichfeldes. Das Eichfeld erscheint aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz in der relativistisch konsistenten Beschreibung geladener Teilchen (Dirac-Gleichung).

Photonen   Masse $m=0$ $S=1$

$$\omega_k = c|k|$$

zwei Polarisationsrichtungen

→ Einteilchenzustandsdichte

$$\nu_1(\varepsilon) = 2 \sum_k \delta(\varepsilon - \hbar\omega_k)$$

$$= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0 dk\, k^2\, \delta(\varepsilon - \hbar c|k|)$$

$$= \frac{V}{\pi^2} \frac{1}{(\hbar c)^3} \varepsilon^2, \quad \varepsilon > 0, \quad d=3$$

Vakuum

Photonen im therm. Gg

kanonisches Ensemble

$$U = \int_0^\infty d\varepsilon\, \nu_1(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1} \qquad \beta = \frac{1}{kT}$$

$$= c_1 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^3}{e^{\underbrace{\varepsilon/kT}_{x}}-1} \quad \propto T^4, \quad x = \varepsilon/kT$$

$$= \frac{V}{(\hbar c)^3 \pi^2} (k_B T)^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{V}{(\hbar c)^3 \pi^2} (k_B T)^4 \, \Gamma(4) \zeta(4)$$

$$\uparrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Spektrale Energiedichte $u(\omega, T)$

$$U = V \int_0^\infty d\omega \, u(\omega, T),$$

$$\Bigg\| \; u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{c^3 \pi^2} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \; \Bigg\|$$

Wiensche Strahlungsgesetz $\hbar\omega \gg k_B T$

Rayleigh-Jeans $\hbar \omega \ll k_B T$

hohe Temp. (klassische Limes) $u \propto k_B T \omega^2$

Präzisionsexperimente an der PTR.

<u>Zshg.:</u> Druck / Energiedichte

$$PV = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty d\varepsilon \, \nu_1(\varepsilon) \underbrace{\ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)}_{\text{ableiten}} \quad \text{part. Int.}$$

$$= + \frac{\beta}{\beta} \int_0^\infty d\varepsilon \left(\int_0^\varepsilon dE \, \nu_1(E) \right) n_B(\varepsilon)$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^\infty d\varepsilon \, \varepsilon \, \nu_1(\varepsilon) n_B(\varepsilon) = \frac{1}{3} U$$

$$\boxed{P = \frac{1}{3} \frac{U}{V}}$$

$$\nu_1(\varepsilon) = c_1 \varepsilon^2$$

$$\int \nu_1(\varepsilon) = \frac{1}{3} \nu_1(\varepsilon) \varepsilon$$

VII 7) Der statistische Operator

$$\bar{A} = \langle A \rangle = \sum_n p_n \langle \Psi_n | A | \Psi_n \rangle$$

$\Updownarrow$ Min. der Shannon-Inform.

Definition: Über ein QM System im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit VOS $\{|n\rangle\}$ liege nur unzureichende Information vor. Mit Wahrscheinlichkeit p_n befinde sich das System im Zustand $|n\rangle$.

Die Menge $(p_n, |n\rangle)$ heißt Ensemble von reinen Zustände $|n\rangle$.

Dann ist der Erwartungswert einer Observablen A gegeben durch

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \langle n | A | n \rangle,$$

$$0 \leq p_n \leq 1.$$

Definition: Der Dichteoperator (Dichtematrix) $\hat{\rho}$ eines Ensembles $(p_n, |n\rangle)$

2-d: $|1\rangle$, $|2\rangle$

ist

$$\hat{\rho} \equiv \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\boxed{\langle A\rangle} = \sum_n p_n \langle n|A|n\rangle =$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$

$$= \sum_{m,n} p_m \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{nm}} \langle n|A|m\rangle$$

$$= \sum_m \langle m \underbrace{\left(\sum_n p_n |n\rangle\langle n|\right)}_{\rho} A|m\rangle$$

$$= \sum_m \langle m|\rho A|m\rangle \stackrel{\rho}{=} \underline{\underline{\mathrm{Tr}(\rho A)}}$$

Tr : trace (Spur)

Zwei VOS $\{|n\rangle\}$, $\{|\alpha\rangle\}$: $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$

$\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\, X = \sum_n \langle n|X|n\rangle =$$

Einschieben der 1

$$= \sum_{n\alpha} \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|X|n\rangle$$

$$= \sum_{n\alpha} \langle\alpha|X\underbrace{|n\rangle\langle n|}_{1}\alpha\rangle = \sum_\alpha \langle\alpha|X|\alpha\rangle$$

• Die Spur ist basisunabhängig.

• $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Tr}(\hat{B}\hat{A})$ Aufgabe

• $\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \mathrm{Tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \ldots$ zyklisch

Eigenschaften des Dichteoperators

1) Normierung: Für Dichteoperatoren ρ gilt:

$$\mathrm{Tr}\,\rho = \sum_{nm} p_n \underbrace{\langle m|n\rangle}_{\delta_{nm}} \langle n|m\rangle = 1$$

2) Hermitizität:

$$\langle\alpha|\rho|\beta\rangle = \sum_n p_n \langle\alpha|n\rangle\langle n|\beta\rangle =$$

$$= \sum_n p_n \langle n|\alpha\rangle^* \langle\beta|n\rangle^* = \left(\sum_n p_n \langle\beta|n\rangle\langle n|\alpha\rangle\right)^*$$

$$= \langle\beta|\rho|\alpha\rangle^* \Rightarrow \rho = \rho^\dagger \text{ „dagger"}$$

3) Positivität: Es gilt für beliebige $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0$$

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle = \sum_n \underbrace{p_n}_{\geq 0} \underbrace{\langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle}_{\underbrace{|\langle\psi|n\rangle|^2}_{\geq 0}} \geq 0$$

$\rho \geq 0$.