11.1.

11.1.07

Zusammengesetzte Systeme

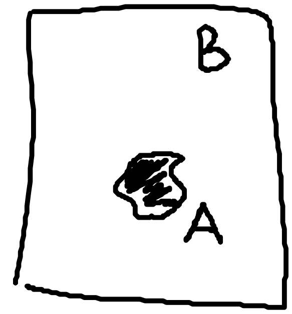
N Teilsystemen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N$$

N-partite

Spezialfall: bipartite

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$



z.B. System und Bad

$|\psi\rangle$ WF des Gesamtsystems S

$$|\psi\rangle = \sum_{a,b} c_{ab} |a\rangle \otimes |b\rangle$$ $\{|a\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_A$

$\{|b\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_B$

Die Koeff. Matrix C, $(C)_{ab} \equiv c_{ab}$

$$C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N} \\ \vdots & & \\ c_{M1} & \cdots & c_{MN} \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{H}_A = M$
$\dim \mathcal{H}_B = N$

rechteckige Matrix

Die reduzierte Dichtematrix

Interessieren uns für reduzierte Info, Erwartungswerte aller Observablen $\hat{A}$ des Systems A, aber nicht von B.

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi | \hat{A} \otimes \mathbb{1} | \Psi \rangle =$$

$$= \sum_{aba'b'} c^*_{a'b'} c_{ab} \langle a' | \otimes \langle b' | \hat{A} \otimes \mathbb{1} \; | a \rangle \otimes | b \rangle$$

$$= \sum_{aba'b'} c^*_{ab} c_{a'b'} \langle a | \otimes \langle b | \; \hat{A} \otimes \mathbb{1} \; | a' \rangle \otimes | b' \rangle$$

$$\langle b | \mathbb{1} | b' \rangle = \delta_{bb'}$$

$$= \sum_{aba'} c^*_{ab} c_{a'b} \langle a | \hat{A} | a' \rangle$$

$$\equiv \operatorname{Tr} \hat{\rho}_A \hat{A} \,,$$

$$\hat{\rho}_A \equiv \sum_{aba'} c^*_{ab} c_{a'b} | a' \rangle \langle a | \,,$$

denn $\quad \operatorname{Tr} \hat{\rho}_A \hat{A} = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \hat{\rho}_A \hat{A} | \alpha \rangle$

$$= \sum_{\alpha a b a'} c^*_{ab} c_{a'b} \underbrace{\langle \alpha | a' \rangle}_{\delta_{\alpha a'}} \langle a | \hat{A} | \alpha \rangle \quad \alpha \to a'$$

$$= \langle \hat{A} \rangle$$

$\hat{\rho}_A$ ist eine Dichtematrix im System A

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi| =$$

$$= \sum_{aba'b'} c^*_{ab} c_{a'b'} \mathrm{Tr}_B |a'\rangle|b'\rangle\langle b|\langle a|$$

$$\mathrm{Tr}_B |b'\rangle\langle b| = \delta_{bb'}$$

$$= \sum_{aba'} c^*_{ab} c_{a'b} |a'\rangle\langle a|$$

- Ausgehend vom reinen Systemzustand $|\Psi\rangle$ erhalten wir durch Spurbildung über System B (Teilspur im System B) den reduzierten Dichteoperator des Systems A, $\hat{\rho}_A$
- Es gilt $\rho_A = \rho_A^\dagger$, $\mathrm{Tr}\,\rho_A = 1$, $\rho_A \geq 0$

Beispiel: klassische W-Verteilung (Dichte) mit zwei Variablen, a, b

$$p(a,b) : \int da\, db\, p(a,b) = 1$$

$$p_A(a) = \frac{\int db\, p(a,b)}{\text{Normierung}}$$

Damit alle Erwartungswerte für Funktionen $f(a)$ berechnen

reduzierte W-Dichte: $\langle f(a)\rangle = \int da\, f(a)\, p_A(a)$

$$\hat{\rho}_A = \sum_{aba'} c^*_{ab} c_{a'b} |a'\rangle\langle a| =$$

$$= \sum_{a a'} (c\, c^\dagger)_{a'a} \rangle$$

$\sum d_{ab} e_{bc}$ Matrixprodukts

wobei $(c^\dagger)_{ab} = c^*_{ba}$

$$c\, c^\dagger = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1N} \\ c_{n1} & & c_{nN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^*_{11} & c^*_{n1} \\ & \\ c^*_{1N} & c^*_{nN} \end{pmatrix}$$

System A System B

<u>Thermodyn.:</u> „System" „Bad"

<u>QIT</u>: Alice Bob

$|\psi\rangle$ in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ heißen <u>separabel</u> (reine Tensoren), falls

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi'\rangle_B \,,$$

andernfalls heißt $|\psi\rangle$ <u>verschränkt</u>.

Es gilt:

$|\psi\rangle$ separabel: $\hat{\rho}_A = \underset{\sim}{\mathrm{Tr}_B} |\phi\rangle_A \underbrace{|\phi'\rangle_B \, {}_B\langle\phi'|}_{} \, {}_A\langle\phi|$

$\mathrm{Tr}_B |\phi'\rangle\langle\phi'| = \sum_b \langle b|\phi'\rangle\langle\phi'|b\rangle$ $= |\phi\rangle_A \, {}_A\langle\phi|$: reiner Zustand,

$= \sum_{\underset{\sim}{b}} \langle\phi'|\underbrace{b\rangle\langle b}_{\mathbb{1}}|\phi'\rangle = \langle\phi'|\phi'\rangle = 1$ denn $\hat{\rho}_A^2 = \hat{\rho}_A$

<u>Satz:</u> $|\psi\rangle$ separabel $\Longrightarrow \hat{\rho}_A$ rein

$\Longrightarrow \hat{\rho}_B$ rein

(Bemerkung: $\hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A |\psi\rangle\langle\psi| = \underset{\sim}{\mathrm{Tr}_A} \underset{\sim}{|\phi\rangle_A} |\phi'\rangle_B \, {}_B\langle\phi'| \, \underset{\sim}{{}_A\langle\phi|}$

$= |\phi'\rangle_B \, {}_B\langle\phi'|$) rein.

<u>Satz:</u> $|\psi\rangle$ verschränkt $\Longrightarrow \hat{\rho}_A$ gemischt

$\hat{\rho}_A^2 \neq \hat{\rho}_A$, $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_A^2 < 1$.

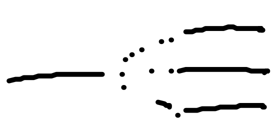
$\Longrightarrow \hat{\rho}_B$ gemischt.

Beispiel: Zwei Spins

verschränkt

$S=0$	Singlett	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$	$S_z = 0$
$S=1$	Triplett	$|\uparrow\uparrow\rangle$	$S_z = 1$
		$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$	$S_z = 0$
		$|\downarrow\downarrow\rangle$	$S_z = -1$

separabel



$S=0$ $\quad S=1$

1) $|\Psi\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_A \, |\uparrow\rangle_B$

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B \; |\uparrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B \; \langle\uparrow|_B \, \langle\uparrow|_A = |\uparrow\rangle_A \langle\uparrow|_A$$

2) $|\Psi\rangle = |S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \end{array} \end{array}$ reiner Z.

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B \, \frac{1}{2} \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)\left(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - \underbrace{(-)}_{+} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_{\text{gemischt}}$$

Annahme: bipartites System

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

Zustand $|\Psi\rangle = \sum_{ab} c_{ab} |a\rangle \otimes |b\rangle$ Doppelsumme

$$\overset{?}{=} \sum_n \lambda_n \, |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle$$ Einfachsumme

Schmidt-Zerlegung.

Def: Die Anzahl der von Null verschiedenen λ_n in der Schmidt-Zerl. von $|\Psi\rangle$ heißt Schmidt-Zahl n_S. Für $n_S = 1$ ist der Zustand separabel, $n_S > 1$ ist er verschränkt.

Satz: Jedes $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ kann zerlegt werden als $\sum_n \lambda_n |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle$, $\lambda_n \geq 0$,

wobei $\{|\alpha_n\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_A$ und $\{|\beta_n\rangle\}$ VOS in $\mathcal{H}_B$ sind.

<u>Beweis</u>: Für $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B$.

$$|\psi\rangle = \sum_{ab} \underbrace{c_{ab}}_{C \text{ Matrix}} |a\rangle \otimes |b\rangle$$

Singulärwertzerlegung: $C = U D V$

U, V unitär, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$; $\lambda_n \geq 0$

s. z.B. Nielsen / Chuang

$$|\alpha_n\rangle \equiv \sum_a U_{an} |a\rangle$$

$$|\beta_n\rangle = \sum_b V_{nb} |b\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \sum_{abn} U_{an} D_{nn} V_{nb} |a\rangle \otimes |b\rangle =$$

$$= \sum_n \lambda_n |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle.$$

Diskussion:

- Singulärwertzerlegung allgemeiner als Spektralzerl.
- geht auch für rechteckige Matrizen

$\Rightarrow$ einige der λ_n s sind Null.

$\Rightarrow$ Folgerung für reduzierte Dichtematrizen:

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_n \lambda_n^2 |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$$

Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Aus $\hat{\rho}_A$ und $\hat{\rho}_B$ können wir $|\psi\rangle$ nicht (genau) rekonstruieren

Warum: $|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n |\alpha_n\rangle \otimes |\beta_n\rangle$

— $\rho_A = \sum_n \lambda_n^2 |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|$

— $\rho_B = \sum_n \lambda_n^2 |\beta_n\rangle\langle\beta_n|$

$|\alpha_n\rangle \to e^{i\varphi_\lambda} |\alpha_n\rangle$ ⚠

- von-Neuman-Entropie $S_A = -k_B \mathrm{Tr}_A\, \rho_A \ln \rho_A$

$$= -k_B \sum_n \lambda_n^2 \ln \lambda_n^2$$

separablen: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{n+1} = 0 \Rightarrow S_A = 0$

verschränkten: $S_A > 0$.