23.1.

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\underbrace{\sigma_i\sigma_j}_{WW} - \sum h_i\sigma_i$$

$$\delta\sigma_i = \sigma_i - \langle\sigma_i\rangle$$

$$\sigma_i\sigma_j = \left(\delta\sigma_i + \langle\sigma_i\rangle\right)\left(\delta\sigma_j + \langle\sigma_j\rangle\right)$$

$$= \delta\sigma_i\delta\sigma_j + \delta\sigma_i\langle\sigma_j\rangle + \delta\sigma_j\langle\sigma_i\rangle + \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle$$

$$= \delta\sigma_i\delta\sigma_j + \sigma_i\langle\sigma_j\rangle + \sigma_j\langle\sigma_i\rangle$$

$$- \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle$$

Damit

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\Big(\underbrace{\delta\sigma_i\,\delta\sigma_j}_{} + \sigma_i\langle\sigma_j\rangle + \sigma_j\langle\sigma_i\rangle - \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle\Big) - \sum h_i\sigma_i$$

quadr. in Fluktuationen $(\delta\sigma)^2$

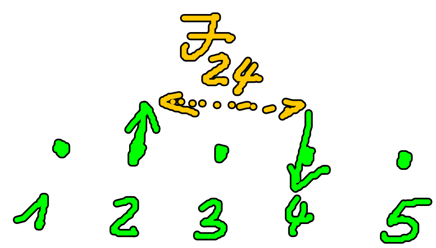
$$\equiv H^{MF} - \frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\,\delta\sigma_i\,\delta\sigma_j$$

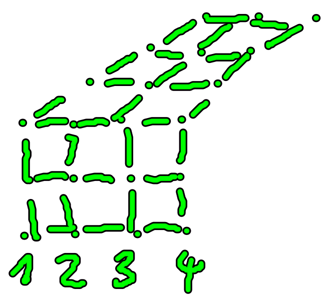
$$H^{MF} = -\sum_{ij} J_{ij}\,\sigma_i\langle\sigma_j\rangle - \sum h_i\sigma_i + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle}_{}$$

$J_{ij} = J_{ji}$

Verschiebung der GZ-Energie, fällt bei Berechnung von

$$\hat{\rho}_{MF} = \frac{e^{-\beta H_{MF}}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_{MF}}}$$





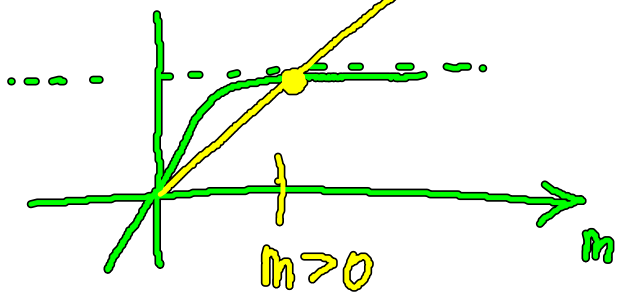
$\to (ijk)$

$J_{ij} \Leftrightarrow$ Anpassen!

Magnetisierung $m = \langle\sigma_i\rangle$

$$\| \; m = \tanh(\beta J m + \beta h) \; \|$$

↑ unbekannt ↑ unbekannt



$h = 0$

$\beta J > 1$: spontane Magnetisierung unterhalb der kritischen Temperatur T_c

$$J = \sum_i J_{ij} \quad)$$

$$\boxed{k_B T_c = J}$$

Konkret: z.B. für nächste-Nachbar-Wechselwirkung

$\downarrow \uparrow \uparrow$ WW zw. benachbarten Spins

$$J_{ij} = j \, \delta_{\langle ij \rangle \, NN} \qquad J = \sum_i J_{ij} = j \cdot \underbrace{2d}_{z}$$

z = „Koordinationszahl" des Gitters

- Phasenübergang 2. Ordnung von ferromagnetischer ($T<T_c$) zu paramagnetischer Phase.
- $T<T_c$ „spontane Symmetriebrechung" $\uparrow, \downarrow$ ($\mathbb{Z}_2$)

- Kritische Exponenten

Zustandsgleichung aus der Selbstkonsistenzgleichungen

$$\underline{m} = \tanh\left(\beta h + \beta J m\right)$$

Magnetisierung

äußeres Magnetfeld

$\beta = \frac{1}{T}$

$k_B = 1$

$$= \frac{\tanh \beta h + \tanh m \, T_c/T}{1 + \left(\tanh \beta h\right)\left(\tanh\left(m \frac{T_c}{T}\right)\right)},$$

$$\tau \equiv \frac{T_c}{T}$$

$$\Rightarrow \quad \tanh \beta h = \frac{m - \tanh m\tau}{1 - m \tanh m\tau}$$

für kleine m

$$\beta h + O(\beta h)^3 = \frac{m - m\tau - \frac{1}{3}(m\tau)^3}{1 - m^2\tau - \frac{1}{3} m (m\tau)^3 - \ldots}$$

$$= \left(m(1-\tau) - \frac{1}{3}(m\tau)^3\right)\left(1 + m^2\tau + O(m^4)\right)$$

$$= m(1-\tau) + m^3\left\{-\frac{1}{3}\tau^3 + \tau(1-\tau)\right\} + O(m^5)$$

$$\Rightarrow \beta h = m(1-\tau) + m^3\left\{\tau - \tau^2 - \frac{1}{3}\tau^3\right\} + O(m^5)$$
$$+ O(\beta h)^3$$

Definitionen: $\quad m(T, h\to 0) \propto (-\varepsilon)^{\beta}$

$$\chi_T \propto \begin{cases} (-\varepsilon)^{-\gamma'} & T<T_c \\ \varepsilon^{-\gamma} & T>T_c \end{cases} \qquad \varepsilon = \frac{T}{T_c} - 1$$

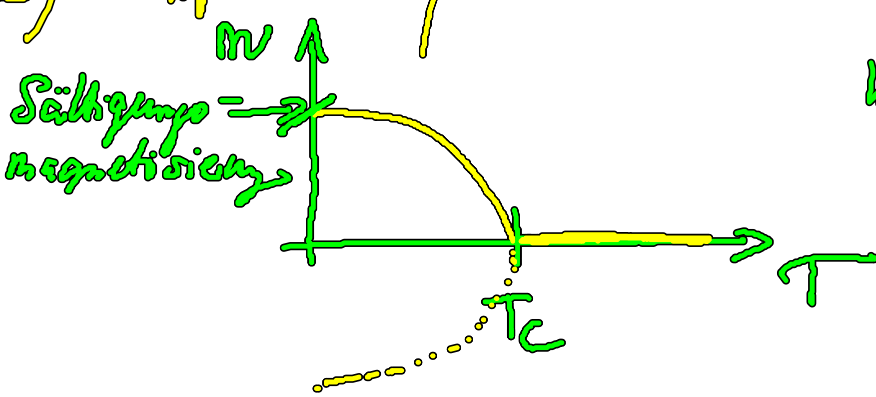
$$h \propto m^{\delta} \qquad T = T_c$$

1) Exponent δ : $\tau = T_c/T = 1$

$$\beta h = m\cdot 0 + m^3\left(-\frac{1}{3}\right), \quad \beta = \beta_c$$
$$h \propto m^3$$

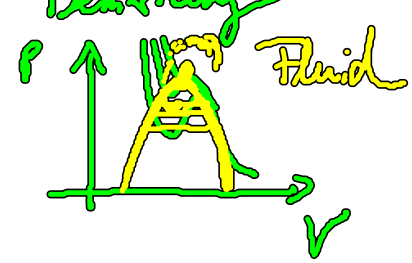
$$\boxed{\delta = 3}$$

2) Exponent β : üA $\beta = \frac{1}{2}$



$h = 0$

Bemerkung



Mean-Field-Methode als „falsche Theorie"

- Falsche Voraussagen von PÜ, die z.B. gar nicht existieren:
  Beispiel $d=1$ - Isingmodell, das keinen PÜ aufweist
  (in $d=1$ exakte Lösung möglich)

- Falsche Werte für die kritischen Exponenten, stimmen z.B. nicht mit denen der exakten Lösung für $d=2$ (Onsager 1944)

- Mean-field i.a. als „vorläufige Beschreibung".
- in elektronischen Systemen: Hartree-Fock-Methode.

Mean-Field Lösung aus der Feldtheorie

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\,\sigma_i\sigma_j - \sum_i h_i\sigma_i$$

$$e^{-\beta F} = Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1} e^{\left(\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j}_{e^{\frac{1}{2}\beta\,\underline{x}^T\,\underline{\underline{J}}\,\underline{x}}} + \sum_i h_i\sigma_i\right)\beta}$$

$$e^{\frac{1}{2}\beta \underline{x}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{x}} = \frac{1}{\sqrt{\det \beta J}} \int \frac{dH_1 \dots dH_N}{\sqrt{2\pi} \cdot \ldots \cdot \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\beta}\sum_{ij} H_i (J^{-1})_{ij} H_j + \sum_i H_i \sigma_i}$$

mehrfaches (N-faches) Gauß-Integral!

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2 + bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}}$$

aus b^2 wird b

quadr. linear

$$Z = \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N} \frac{1}{\sqrt{\det \beta J}} \int \frac{dH_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dH_N}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\beta}\sum_{ij} H_i (J^{-1})_{ij} H_j} \times$$

$$\times\, e^{\beta \sum_i h_i \sigma_i + \sum H_i \sigma_i}$$

$$\prod_{i=1}^{N} 2\cosh(\beta h_i + H_i) =$$

$$= Z_{free}\left[\underbrace{\beta h_i + \beta}\, H_i/\beta\right] = e^{-\beta F_{free}}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{1}{\sqrt{\det \beta J}} \int \frac{dH_1 \ldots dH_N}{\sqrt{2\pi} \cdot \ldots \cdot \sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{1}{2\beta} \sum_{ij} H_i (J^{-1})_{ij} H_j} \times$$

$$\times Z_{frei}\left[\beta h_i + \beta \frac{H_i}{\beta}\right]$$

- Zustandssumme Z als gewichtetes Integral über die freie Zustandssumme Z_{frei} des wechselwirkungsfreien Systems in Magnetfeldern

$$h_i \,(\text{äußeres}) + H_i/\beta$$

- In Z treten die Spinvariablen σ_i gar nicht mehr explizit auf! Stattdessen Beschreibung der WW durch „fluktuierende Felder" H_i
- Die Physik ist die gleiche in beiden Beschreibungen
- Die feldtheoretische Beschreibung häufig vorteilhafter.

Jetzt von der Feldtheorie zur MF-Näherung

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\det \beta J}} \int \frac{dH_1 \ldots dH_N}{\sqrt{2\pi} \cdot \ldots \cdot \sqrt{2\pi}} \, e^{-S[H_i]}$$

$$S[H_i] = \frac{1}{2\beta} \sum_{ij} H_i (J^{-1})_{ij} H_j - \sum_i \ln 2\cosh(H_i + \beta h_i)$$

„Hubbard-Stratonovich"

Berechnen des Integrals in

Sattelpunktsnäherung.