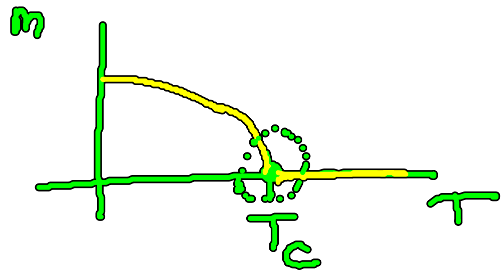
30.1.07

$$m = \tanh(\beta J m + \beta h)$$

Zustandsgleichung

$$\beta h = m(1-\tau) + m^3\left(\tau - \tau^2 + \tau^3/3 + \dots\right)$$

$$\tau \equiv T_c/T$$



$$t \equiv \frac{T-T_c}{T_c} = \frac{1}{\tau} - 1$$

Ordnungsparameter $\eta = m$ Magnetisierung (pro Spin)

$m = \langle \sigma_i \rangle$ homogen

$$\tau = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$ $|t| \ll 1$

t gibt die Abweichung von T_c an

$$1-\tau = t + O(t^2)$$

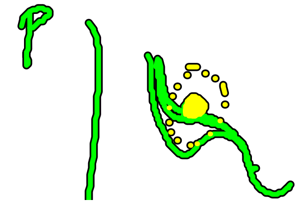
$$\tau - \tau^2 + \frac{1}{3}\tau^3 = \cancel{1} - t - (\cancel{1} - 2t) + \frac{1}{3}(1-t)(1-2t) + O(t^2)$$
$$= \frac{1}{3} + O(t^2)$$

Zustandsgl.:

$$\boxed{\beta h = \eta t + \frac{1}{3}\eta^3 + \dots, \quad |\eta| \ll 1, \quad |t| \ll 1}$$

van-der-Waals-Gas

Kritischer Punkt T_c, P_c, V_c



Definiert $p = \frac{P}{P_c} - 1$

$$v = \frac{V}{V_c} - 1 \qquad t = \frac{T}{T_c} - 1$$

$$p = 4t - 6tv - \frac{3}{2}v^3 + O(tv^2)$$

AUFGABE

Ordnungsparameter $\eta \equiv \frac{\rho - \rho_c}{\rho_c} = \frac{V_c}{V} - 1$

$$= \frac{1}{v+1} - 1 = \frac{-v}{v+1}$$

$$\approx -v + O(v^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 4t + 6t\eta + \frac{3}{2}\eta^3} + O(t\eta^2), \ |\eta| \ll 1, |t| \ll 1$$

Zustandsgleichung aus Minimierung des Landau-Funktionals (des Ordnungsparameters)

Ansatz: $\Sigma[\eta] = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 + \dots$

Folgt Zustandsgl. aus $0 = \Sigma'[\eta]$

$$\Rightarrow 0 = a_1 + 2a_2\eta + 3a_3\eta^2 + 4a_4\eta^3 + \dots$$

$$\Sigma_{ISING}[\eta] = a_0 - \beta h\eta + \frac{t}{2}\eta^2 + \frac{1}{12}\eta^4 + \dots$$

$$\Rightarrow 0 = -\beta h + t\eta + \frac{1}{3}\eta^3 + \dots$$

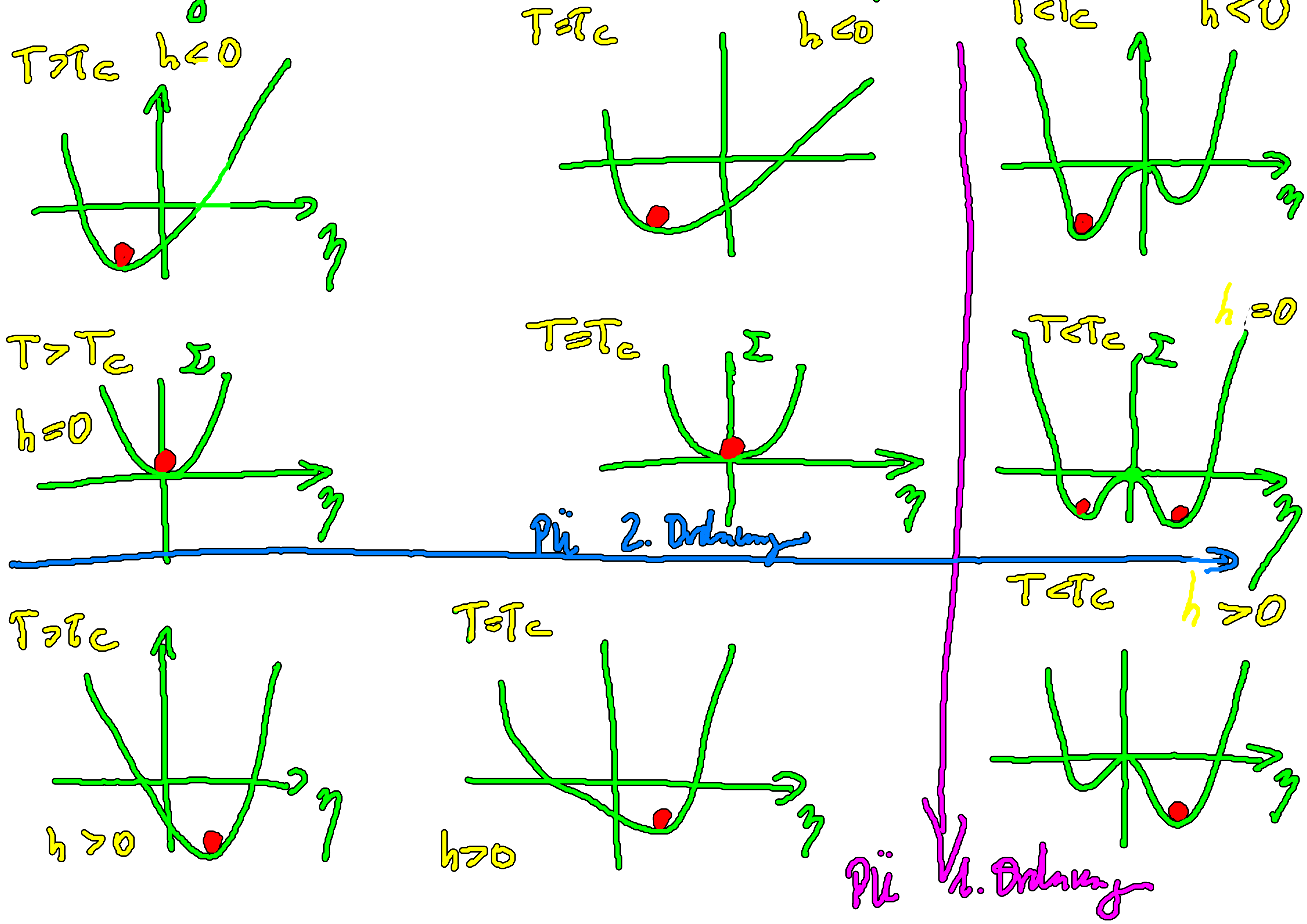
$$\Sigma_{Waals}[\eta] = a_0 + (4t - p)\eta + 3t\eta^2 + \frac{3}{8}\eta^4 + \dots$$

- Koeff. $a_4 > 0$

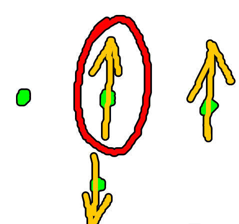
- Koeff. $a_3 = 0$
- Koeff. $a_2 \propto t \equiv \frac{T-T_c}{T_c}$ wechselt Vorzeichen

Wir skizzieren $\Sigma[\eta]$

$$\Sigma_{Ising} = a_0 + \frac{t}{2}\eta^2 + \frac{1}{12}\eta^4 \qquad (h=0)$$



Fluktuationen



$$p(\sigma_1 \dots \sigma_N) = \frac{e^{-\beta \mathcal{H}[\sigma_i]}}{Z}$$

$$p(\sigma_1) = \sum_{\sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_N} p(\sigma_1 \ldots \sigma_N)$$ Einteilchen-Verteilung

z.B. $\langle \sigma_1 \rangle$

n-tes Moment $\langle \sigma_1^n \rangle = \sum_{\sigma_1} \sigma_1^n \, p(\sigma_1)$

Mehr-Teilchen-Verteilungen,
z.B. für zwei Spin

$$p(\sigma_i, \sigma_k) = \sum_{\sigma_l \, (l \neq i,k)} p(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$$

- sehr schwer auszurechnen

Zwei-Teilchen-Korrelation

Korrelations-matrix

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$$

$$= \frac{\sum_{\sigma_1 \ldots \sigma_N} \sigma_i \sigma_j \, e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \qquad Z = \sum_{\sigma_1 \sigma_N} e^{-\beta\left[-\sum J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i\right]}$$

$$= \frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial \beta \sigma_i \, \partial \beta \sigma_j} Z$$

Integraldarstellung?

$$Z = \int \mathcal{D}[H]\, e^{-S[H]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det \beta J}} \int \frac{dH_1 \dots dH_N}{(2\pi)^{N/2}}\, e^{-S(H_1 \dots H_N)}$$

$$S(H_1 \dots H_N) = \frac{1}{2\beta} \sum H_i (J^{-1})_{ij} H_j - \sum_i \ln 2\cosh(H_i + \beta h_i)$$

Jetzt $\displaystyle \frac{\partial^2}{\partial \beta h_i \, \partial \beta h_j} \prod_{l=1}^{N} 2\cosh(H_l + \beta h_l)$

z.B. $\displaystyle \frac{\partial}{\partial \beta h_j} \cosh(H_l + \beta h_l) = \delta_{jl} \sinh(H_l + \beta h_l)$

$$= \delta_{jl} \cosh(H_l + \beta h_l) \tanh(H_l + \beta h_l)$$

$$= \tanh(H_i + \beta h_i) \tanh(H_j + \beta h_j) \prod_{l=1}^{N} 2\cosh(\dots)$$

$i \neq j$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \frac{\int \mathcal{D}[H]\, \tanh(H_i + \beta h_i) \tanh(H_j + \beta h_j)\, e^{-S}}{\int \mathcal{D}[H]\, e^{-S}}$$

• MF-Näherung: $\mathcal{H}_i = \overline{\mathcal{H}}_i$,

$$m_i = \tanh(\overline{H}_i + \beta h_i) = \tanh(H_i + \beta h_i)$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{MF} = \frac{\int \mathcal{D}[H]\, m_i m_j\, e^{-S}}{\int \mathcal{D}[H]\, e^{-S}} = m_i m_j$$

$$= \langle \sigma_i \rangle_{MF} \langle \sigma_j \rangle_{MF}$$

$\Rightarrow$ Fluktuation $\langle \delta\sigma_i\, \delta\sigma_j \rangle \equiv$

$$\equiv \langle (\sigma_i - \langle \sigma_i \rangle)(\sigma_j - \langle \sigma_j \rangle) \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

$= 0$. Das ist unrealistisch.

Um das zu verbessern, muß die quadratische Entwicklung von S berechnet werden:

Entwickeln um die MF-Lösung

$$H_i = \overline{H}_i + \varphi_i \qquad \text{nach kleinen } \varphi_i$$

$$S[\overline{H}_i + \varphi_i] = S[\overline{H}_i] + \sum_i \underbrace{\frac{\partial S}{\partial H_i}[\overline{H}_i]}_{0} \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial H_i \partial H_j} S[\overline{H}] \varphi_i \varphi_j$$

Matrix der 2. Ableitung

$$S[\bar{H}_i] = \frac{1}{2\beta} \sum_{ij} \bar{H}_i (\mathcal{J}^{-1})_{ij} \bar{H}_j - \sum_i \ln 2 \cosh(\bar{H}_i + \beta h_i)$$

$$A_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{H}_i \partial \bar{H}_j} S = \frac{1}{2\beta}\left[(\mathcal{J}^{-1})_{ij} + (\mathcal{J}^{-1})_{ji}\right] - \frac{\delta_{ij}}{\cosh^2(\bar{H}_i + \beta h_i)}$$

$$= \frac{1}{\beta} \mathcal{J}^{-1}_{ij} - (1 - m_i^2)\,\delta_{ij}$$

Jetzt $\tanh(\bar{H}_i + \varphi_i + \beta h_i) =$

$$= \underbrace{\tanh(\bar{H}_i + \beta h_i)}_{m_i} + \underbrace{\tanh'(\bar{H}_i + \beta h_i)}_{(1 - m_i^2)} \varphi_i + \dots$$

$$\langle \delta\sigma_i \, \delta\sigma_j \rangle = (1 - m_i^2)(1 - m_j^2) \langle \varphi_i \varphi_j \rangle$$

$$\langle \varphi_i \varphi_j \rangle \equiv \frac{\int \mathcal{D}[\varphi]\, \varphi_i \varphi_j \, e^{-S''[\varphi]}}{\int \mathcal{D}[\varphi] \quad e^{-S''[\varphi]}}$$

$$S''[\varphi] \equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} \varphi_i A_{ij} \varphi_j$$