- Bitte anschauen: MMP
  Vorlesung 10: 6.4. Nabla-Operator
  " 11:} 6.6. Rotation
  " 12.} 7.1: Linienintegral

1.4. Galileisches Relativitätsprinzip
(der klass. Mechanik)

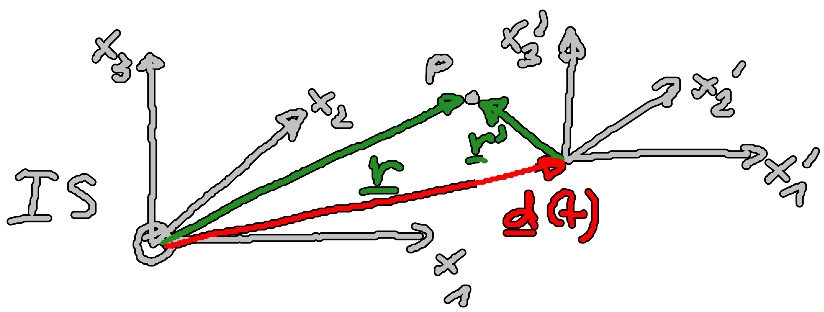
$$\boxed{\text{Alle IS bewegen sich gleichförmig zueinander. Sie sind alle gleichwertig}} \quad (1.26)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\text{Die Newtonschen Axiome sind "forminvariant" unter Galilei-Transformationen}}$$

- Beweis!?

a) Herleitung spezielle Galileitransformation:



BS' = IS'?

$$\underline{r}(t) = \underline{r}'(t) + \underline{d}(t) \quad (1.28)$$

- Forderung: 1. Newton. Axiom gilt in allen IS

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{0} \quad \text{in IS} \quad (1.29)$$

$$\longrightarrow \quad m\ddot{\underline{r}}' = -m\ddot{\underline{d}}(t) \quad (1.30)$$

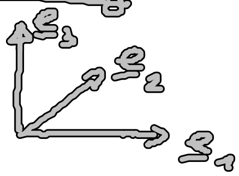
Bew. gesetz in BS'

$$BS' = IS'? \longrightarrow \ddot{\underline{d}}(t) = \underline{0} \longrightarrow \underline{d} = \underline{v}t + \underline{a} \quad (1.31)$$

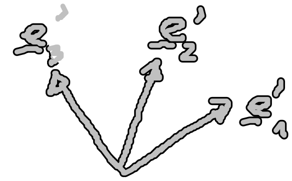
$\longrightarrow \quad \underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t - \underline{a} \quad (1.32)$

b) Verallgemeinerung

• Erinnerung:



$\xrightarrow[\text{Drehmatrix } \underline{\underline{D}} \in SO(3)]{\text{Drehung der ONB}}$



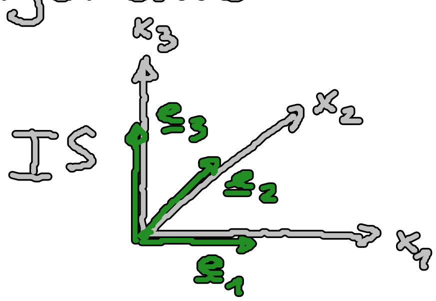
mit $D_{ij} = \underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j \xrightarrow{\underline{e}_i^{(\prime)} \cdot \underline{e}_j^{(\prime)} = \delta_{ij}} \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t = 1 \longleftrightarrow \underline{\underline{D}}^t = \underline{\underline{D}}^{-1}$

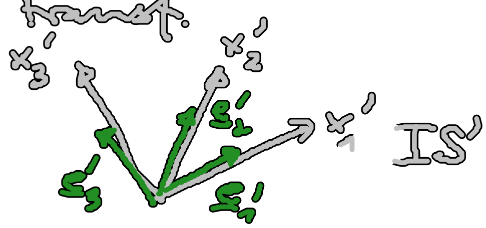
passiver Standpkt.: $\underline{a} = a_j \underline{e}_j = a_i' \underline{e}_i' \longrightarrow$

$a_i' = D_{ij} a_j$

$\underline{a}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{a}$ mit $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\underline{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$

• allgemeine Galilei transf.





$$\boxed{\begin{aligned} \underline{r}' &= \underline{\underline{D}}\,(\underline{r} - \underline{v}t - \underline{a}) \\ t' &= t - t_0 \end{aligned}} \quad (1.33)$$

$\left.\begin{array}{l} \underline{v} \ldots \text{ gleichförmige Bewegung ("boost"), 3 Komp} \\ \underline{a} \ldots \text{ konst. Verschiebung, 3 Komp.} \end{array}\right\}$ in Komp. bzgl. ONB von IS

$t_0 \ldots$ " " in der Zeit, 1 Parameter

$\underline{\underline{D}}$ ... Drehung von IS' relativ zu IS,
3 Eulersche Winkel

$\longrightarrow$ **Galileigruppe mit 10 Parametern bzgl. Hintereinander-Ausführung** $\longrightarrow$ Übungen: zeige Gruppenaxiome

c) 2. Newtonsches Axiom forminvariant unter (1.33)?

$$\underline{\underline{D}} \,\Big|\, m\underline{\ddot{r}}(t) = \underline{F}(\underline{r}, \underline{\dot{r}}, t) \quad \text{in IS}$$

$$\underline{\ddot{r}} = \underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\ddot{r}}', \quad \underline{r} = \underline{\underline{D}}^{-1}\underline{r}' + \underline{v}t + \underline{a}, \quad \underline{\dot{r}} = \underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\dot{r}}' + \underline{v}, \quad t = t' + t_0$$

$$\longrightarrow \quad m\underline{\ddot{r}}' = \underline{\underline{D}}\,\underline{F}(\ldots) = \underline{F}'(\underline{r}', \underline{\dot{r}}', t) \quad \text{in IS}'$$

Gesetze der klass. Physik müssen forminvariant unter (1.33) sein!

d) <u>Gültigkeit der Galilei-Invarianz</u>

- Maxwell-Gln <u>nicht</u> forminvariant unter (1.33)!

denn: Galilei: IS: c , IS': $c \pm v$
Maxwell: IS: c , IS': c

- <u>Einsteinsches Rel.prinzip:</u>

Alle IS sind gleichwertig. In jedem IS ist die Lichtgeschwindigkeit c

$\longrightarrow$ Lorentz-Trafo für IS $\to$ IS': Zeit nicht mehr absolut

$\hookrightarrow$ Maxwell-Gln. invariant

$\hookrightarrow$ 2. Newtonsches Axiom modifiziert:

$$m \longrightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

m_0: "Ruhemasse"

2. Erhaltungssätze

• allg. Folgerungen aus den Newton. Axiomen:
- Begriffe einführen
- Erhaltungssätze ", erleichtern Problemlsg.

2.1. Impulserhaltung

• Impulssatz: $\int_{t_1}^{t_2} dt \,\Big|\, \underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\underline{p}}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\,dt$

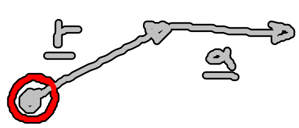
$$\longrightarrow \boxed{\underline{p}(t_2) - \underline{p}(t_1) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(t)\,dt}_{\text{Kraftstoß}}} \quad (2.1)$$

$$\boxed{\underline{F} = 0 \longrightarrow \underline{p} = \text{konst.} \quad \ldots \text{Impulserhaltung}} \quad (2.2)$$

~ 1. Newtonsches Axiom

2.2. Drehimpulserhaltung

• Führe ein: Moment $\underline{M}$ einer Vektorgröße $\underline{a}$ bezogen auf einen Pkt. im Raum:



$$\boxed{\underline{M} := \underline{r} \times \underline{a}} \quad (2.3)$$

Bsp:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{D} = \underline{r} \times \underline{F} \quad \ldots \text{ Kraftmoment, Drehmoment} \\ &\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} \quad \ldots \text{ Impulsmoment, Drehimpuls} \end{aligned}} \qquad (2.4)$$

($\underline{r} \times \underline{v}$ ... Moment der Geschw.
$\underline{r} \times \underline{a}$ .. " der Beschl.)

- Betrachte: $\underline{D} = \underline{r} \times \underline{F} \overset{\text{2. Newt.}}{=} \underline{r} \times \frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{(\underline{r} \times \underline{p})}_{\underline{L}} - \underbrace{\dot{\underline{r}} \times \underline{p}}_{=0,\ \dot{\underline{r}} \parallel \underline{p}}$

$\longrightarrow$ $$\boxed{\begin{aligned} &\text{Drehimpulssatz: } \frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{D} \qquad (2.5) \\ &\text{Integralform: } \underline{L}(t_2) - \underline{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{D}(t)\,dt \qquad (2.6) \end{aligned}}$$

- $\boxed{\underline{D} = 0 \longrightarrow \underline{L} = \text{konst.} \quad \ldots \text{ Drehimpulserhaltung}}$ (2.7)

Anwendung: $\longrightarrow$ Keplerproblem
$\longrightarrow$ starrer Körper

2.3. Flächensatz

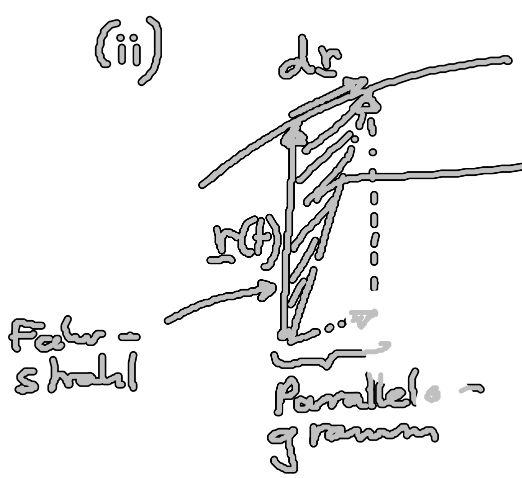
- Sei $\underline{D} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{0}$
  - $\nearrow$ $\underline{F} = 0$
  - $\searrow$ $\boxed{\underline{F} = f(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)\, \underline{e}_r \parallel \underline{r} \quad \ldots \text{ Zentralkraftfeld}}$ (2.8), $\underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{r}$

- Sei $\underline{D} = 0 \longrightarrow \underline{L} = \text{konst.} = m(\underline{r} \times \dot{\underline{r}})$

$\longrightarrow \underline{r}, \dot{\underline{r}} \perp \underline{L}$

(i) $\boxed{\underline{D} = 0 \longrightarrow \text{ebene Bewegung} \perp \underline{L}}$ (2.9)

(ii)



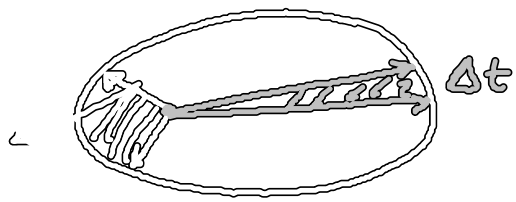
Fläche
$df = \frac{1}{2} |\underline{r} \times d\underline{r}|$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\frac{1}{2}|\underline{r} \times d\underline{r}|}{dt} = \frac{1}{2}|\underline{r} \times \underline{v}| = \frac{1}{2m}|\underline{r} \times \underline{p}| = \frac{1}{2m}|\underline{L}| = \text{konst.} \qquad (2.10)$$

$\longrightarrow$ <u>Flächensatz</u> (2. Keplersche Gesetz)

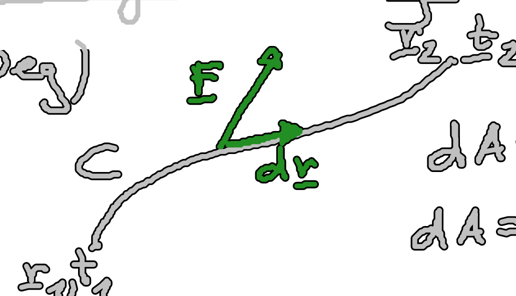
$\underline{D} = 0 \longrightarrow$	Die vom Fahrstrahl pro Zeiteinheit überstrichene Fläche ist konstant

(2.11)



2.4. Energieerhaltung

a) <u>Arbeit</u>: (Kraft × Weg)



$$dA := \underline{F} \cdot d\underline{r} \qquad (2.12)$$

$dA = 0$, $\underline{F} \perp d\underline{r}$

• <u>Def</u>:

$$A_{12}(C) = \int_{r_1,C}^{r_2} dA = \int_{\underline{r}_1,C}^{r} F(r,\dot{r},t) \cdot d\underline{r}$$

$$= \int_{t_1,C}^{t_2,C} \underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\, dt \qquad (2.13)$$

.. Arbeit, die Kraftfeld $\underline{F}$ am Massenpkt. verrichtet, wenn er sich von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ bewegt.